

## UNIDAD 6



# LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

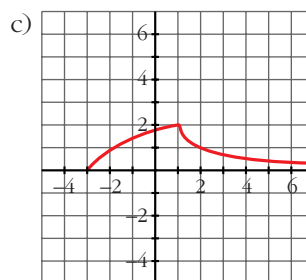
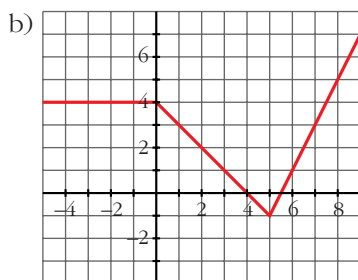
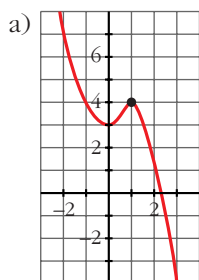
### Página 138

1. Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

$$a) y = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 1 \\ 5 - x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 4 - x & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x - 11 & x > 5 \end{cases}$$

$$c) y = \begin{cases} \sqrt{x+3} & x < 1 \\ 2/x & x \geq 1 \end{cases}$$



Las tres son continuas.

2. Si dispusieras de una buena lupa, podrías realizar el siguiente experimento:

*Observa un objeto pequeño (por ejemplo, el capuchón de un bolígrafo verde), poniendo la lupa a una distancia de 10 cm. El objeto se ve notablemente ampliado. Varía la distancia y observa lo que ocurre:*

- Si pegas la lupa al objeto, éste se verá de su mismo tamaño.
- Si la separas poco a poco, verás cómo se va ampliando el tamaño del capuchón, de modo que, al llegar a una cierta distancia, se verá toda la lupa verde.
- Situando la lupa más allá de esa distancia, se verá el objeto grande e invertido. Si seguimos separándola, irá disminuyendo su tamaño...

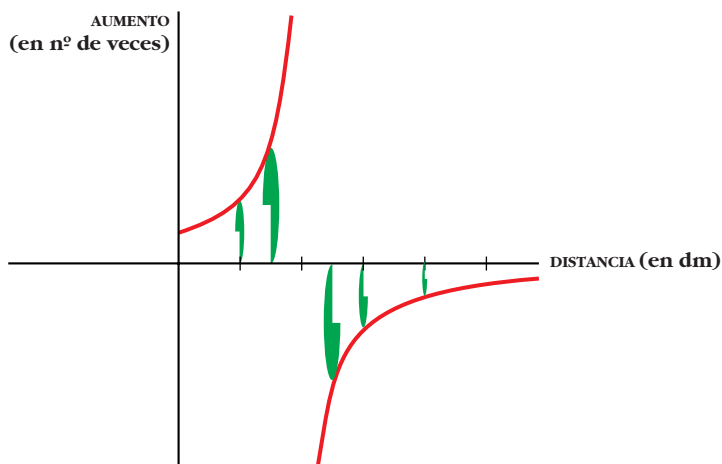
Para una cierta lupa, la ecuación que relaciona el aumento,  $A$ , con la distancia,  $d$ , a la que se coloca el objeto es:

$$A = \frac{2}{2-d}$$

$d$  = distancia de la lupa al objeto (en dm)

$A$  = aumento (número por el que se multiplica el tamaño)

El observador debe situarse de modo que la lupa esté a la mitad de la distancia entre el objeto y su ojo.



- Calcula el tamaño aparente del objeto para los siguientes valores de  $d$  y observa cómo va aumentando al aproximarnos a 2 para luego disminuir según nos alejamos de este valor:

0,1   0,5   1   1,5   1,9   1,99   2,01   3   10

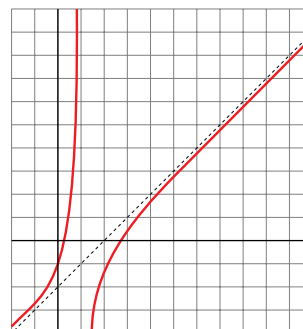
$d$	0,1	0,5	1	1,5	1,9	1,99	2,01	3	10
$A$	1,05	1,33	2	4	20	200	-200	-2	-0,25

## Página 139

3. Vamos a comprobar que la gráfica de la función  $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$  se aproxima a la recta de ecuación  $y = x - 2$ .

- Completa en tu cuaderno esta representación, obteniendo los valores de  $f(x)$  para los siguientes valores de  $x$ :

5   6   7   8   9   10



Observa que la gráfica de la curva  $y = f(x)$  se aproxima a la de la recta cada vez más. Por ello, a dicha recta se le llama asíntota de la curva.

Comprueba para valores *muy grandes* de  $x$  que la diferencia entre curva y recta llega a ser *muy pequeña*.

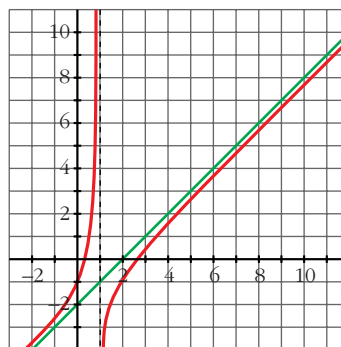
$x$	50	100	1 000
$y = f(x)$			
$y = x - 2$			
DIFERENCIA			

■ Comprueba, mediante pasos similares a los anteriores, que la función

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 2x} \text{ tiene por asíntota a la recta de ecuación } y = x + 2.$$

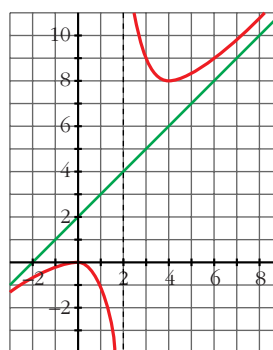
$x$	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2,75	3,8	4,83	5,86	6,88	7,89

$x$	50	100	1 000
$y = f(x)$	47,98	97,99	997,999
$y = x - 2$	48	98	998
DIFERENCIA	0,02	0,01	0,001



■ Para  $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x}$

$x$	50	100	1 000
$y = f(x)$	52,08	102,04	1 002,004
$y = x + 2$	52	102	1 002
DIFERENCIA	0,08	0,04	0,004



## Página 141

1. Explica por qué la función  $y = x^2 - 5$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Porque está definida en todo  $\mathbb{R}$ .

2. Explica por qué la función  $y = \sqrt{5 - x}$  es continua en  $(-\infty, 5]$ .

Porque su dominio es  $(-\infty, 5]$ .

3. Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:

a)  $y = \frac{x+2}{x-3}$

b)  $y = \frac{x^2-3x}{x}$

c)  $y = \frac{x^2-3}{x}$

d)  $y = \frac{1}{x^2}$

e)  $y = \begin{cases} 3x-4, & x < 3 \\ x+1, & x \geq 3 \end{cases}$

f)  $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

- a) Rama infinita en  $x = 3$  (asíntota vertical).
- b) Discontinuidad evitable en  $x = 0$  (le falta ese punto).
- c) Rama infinita en  $x = 0$  (asíntota vertical).
- d) Rama infinita en  $x = 0$  (asíntota vertical).
- e) Salto en  $x = 3$ .
- f) Salto en  $x = 4$ .

### Página 144

1. Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-3x+5}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a)  $-\frac{3}{2}$

b)  $\sqrt{3}$

c)  $-1$

### Página 145

2. Calcula  $k$  para que  $y = \begin{cases} x^3-2x+k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$  sea continua en  $\mathbb{R}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} 21 + k = 7 \Rightarrow k = -14$$

### Página 147

1. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados.

a)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$  en  $-2, 0$  y  $2$

b)  $f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$  en  $2, 0$  y  $3$

c)  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$  en  $1$  y  $-3$

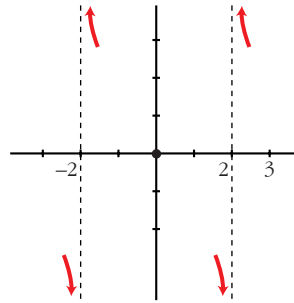
d)  $f(x) = \frac{x^4}{x^3+3x^2}$  en  $0$  y  $-3$

$$a) f(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x-2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

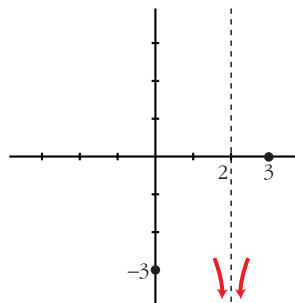


$$b) f(x) = \frac{4(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

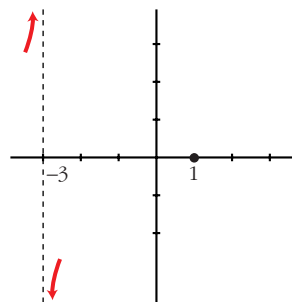
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$



$$c) f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

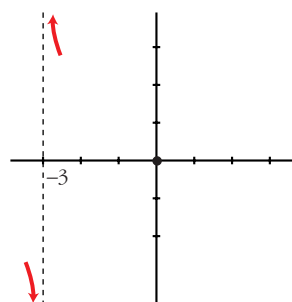
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$



$$d) f(x) = \frac{x^4}{x^2(x+3)}$$

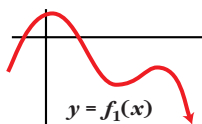
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

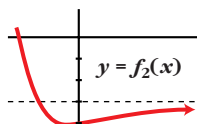


## Página 148

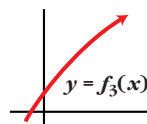
1. Di el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

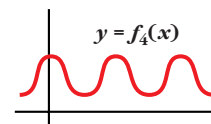


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existe}$$



## Página 149

1. Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b)  $f(x) = 5x^3 + 7x$

c)  $f(x) = x - 3x^4$

d)  $f(x) = \frac{1}{3x}$

e)  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a)  $-\infty$

b)  $+\infty$

c)  $-\infty$

d) 0

e) 0

f)  $-\infty$

2. Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$ , halla un valor de  $x$  para el cual  $x^3 - 200x^2$  sea mayor que 1 000 000.

Por ejemplo, para  $x = 1000$ ,  $f(x) = 800\,000\,000$

3. Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$ , halla un valor de  $x$  para el cual  $\frac{1}{x^2 - 10x}$  sea menor que 0,0001.

Por ejemplo, para  $x = 1000$ ,  $f(x) = 0,00000101$

## Página 150

4. Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y representa sus ramas:

a)  $f(x) = \frac{1}{3x}$

b)  $f(x) = \frac{3}{x}$

c)  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

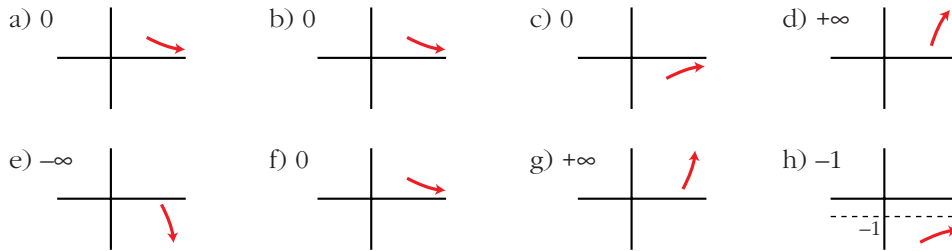
d)  $f(x) = 3x - 5$

e)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

f)  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

g)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

h)  $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$



## Página 151

1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

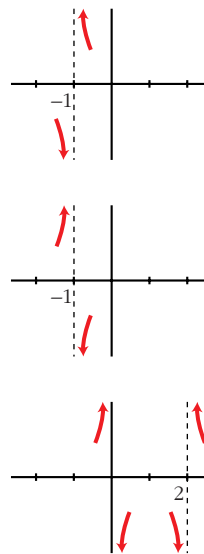
$$\text{c) } y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$



## Página 153

2. Halla las ramas infinitas, cuando  $x \rightarrow +\infty$ , de las siguientes funciones. Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas:

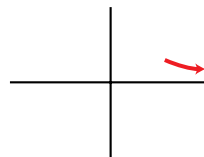
$$\text{a) } y = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^3}{1 + x^2}$$

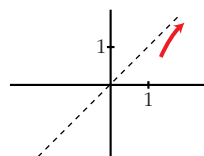
$$\text{c) } y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$$

$$\text{d) } y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$$

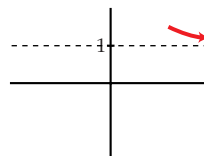
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $y = 0$  es asíntota horizontal



b)  $y = x + \frac{-x}{x^2 + 1}$ ;  $y = x$  es asíntota oblicua

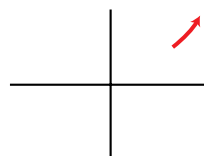


c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ;  $y = 1$  es asíntota horizontal



d) grado de  $P$  - grado de  $Q \geq 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ; rama parabólica hacia arriba



## Página 154

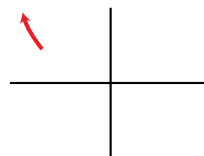
1. Halla los límites cuando  $x \rightarrow -\infty$  y representa las ramas correspondientes:

a)  $f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$

b)  $f(x) = (x^2 + 3)/-x^3$

c)  $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$



c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$





## Página 155

2. Halla las ramas infinitas cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = \frac{1}{x^2 + 1} & \text{b) } y = \frac{x}{1 + x^2} & \text{c) } y = \frac{x^2}{1 + x^2} & \text{d) } y = \frac{x^3}{1 + x^2} \\ \text{e) } y = \frac{x^4}{x^2 + 1} & \text{f) } y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} & \text{g) } y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{h) } y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x} \end{array}$$

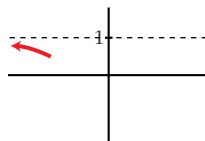
a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;  $y = 0$  es asíntota horizontal



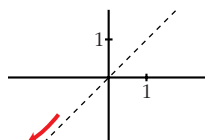
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;  $y = 0$  es asíntota horizontal



c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ;  $y = 1$  es asíntota horizontal



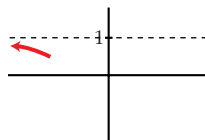
d)  $y = x + \frac{-x}{1 + x^2}$ ;  $y = x$  es asíntota oblicua



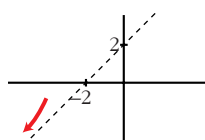
e) grado  $P - \text{grado } Q \geq 2$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ; rama parabólica



f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ;  $y = 1$  es asíntota horizontal



g)  $y = x + 2 + \frac{-2}{x + 1}$ ;  $y = x + 2$  es asíntota oblicua



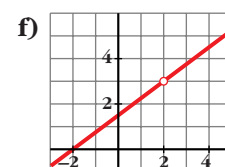
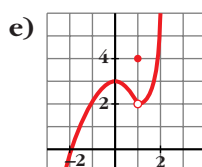
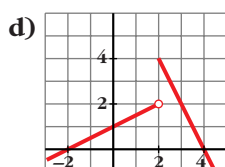
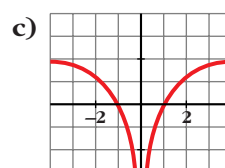
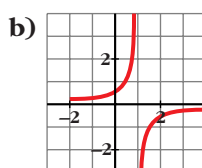
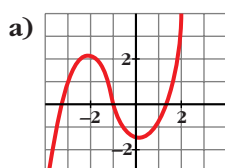
h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

- 1 a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?  
 b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



- a) Solo la a).  
 b) Rama infinita en  $x = 1$  (asíntota vertical)  
 c) Rama infinita en  $x = 0$  (asíntota vertical)  
 d) Salto en  $x = 2$   
 e) Punto desplazado en  $x = 1$ ;  $f(1) = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$   
 f) No está definida en  $x = 2$

2 Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{3}{x^2 + x}$

b)  $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$

c)  $y = \frac{x - 1}{2x + 1}$

d)  $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e)  $y = \frac{2}{5x - x^2}$

f)  $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

a) 0 y -1

b) 2

c)  $-\frac{1}{2}$

d) Continua

e) 0 y 5

f)  $\sqrt{2}$  y  $-\sqrt{2}$

**3** Comprueba si las siguientes funciones son continuas en  $x = 0$  y en  $x = -2$ :

a)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b)  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

c)  $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d)  $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) No es continua ni en  $x = 0$  ni en  $x = -2$ .

b) Sí es continua en  $x = 0$ , no en  $x = -2$ .

c) No es continua en  $x = 0$ , sí en  $x = -2$ .

d) Continua en  $x = 0$  y en  $x = -2$ .

**4** Indica para qué valores de  $\mathbb{R}$  son continuas las siguientes funciones:

a)  $y = 5 - \frac{x}{2}$

b)  $y = \sqrt{x - 3}$

c)  $y = \sqrt{-3x}$

d)  $y = \sqrt{5 - 2x}$

a)  $\mathbb{R}$

b)  $[3, +\infty)$

c)  $(-\infty, 0]$

d)  $(-\infty, \frac{5}{2}]$

**5** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 5 - \frac{x}{2} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x}{x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10 + x - x^2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

h)  $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

a) 5

b) 0

c) -2

d)  $\sqrt{2}$

e) 2

f) 2

g) 1

h)  $e^2$

**6** Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de cada una de las siguientes funciones. Representa el resultado que obtengas.

a)  $f(x) = x^3 - 10x$

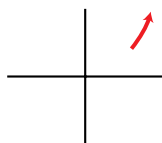
b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c)  $f(x) = \frac{3 - x}{2}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

☛ Dale a  $x$  "valores grandes" y saca conclusiones.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

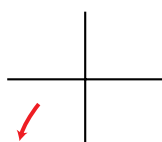


d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

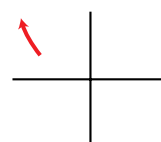


**7** Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando  $x \rightarrow -\infty$  y representa la información que obtengas.

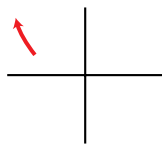
a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



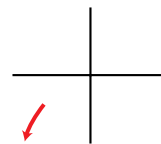
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



**8** Comprueba, dando valores grandes a  $x$ , que las siguientes funciones tienden a 0 cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10}$

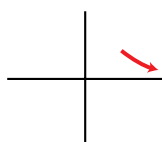
b)  $f(x) = \frac{100}{3x^2}$

c)  $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{x}}$

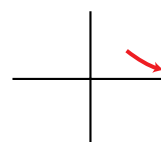
d)  $f(x) = \frac{2}{10x^2 - x^3}$

Representa gráficamente su posición sobre el eje  $OX$  o bajo el eje  $OX$ .

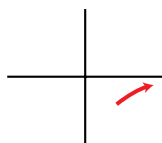
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



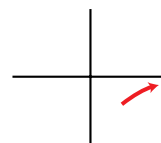
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



**9** Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x)^2$

**10** Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando  $x \rightarrow -\infty$  y representa la información que obtengas.

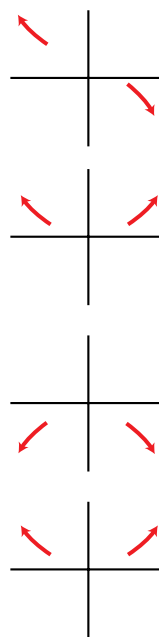
Resolución de los ejercicios 9 y 10:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$



## Página 164

**11** Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

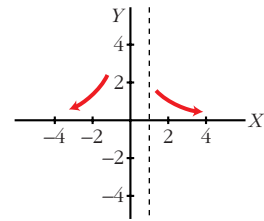
g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

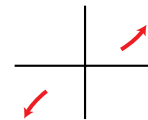
**12** Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

Resolución de los ejercicios 11 y 12:

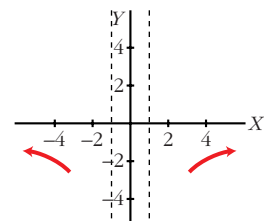
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$



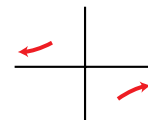
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



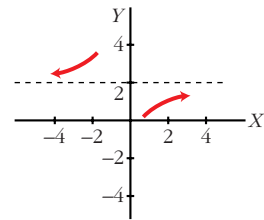
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$



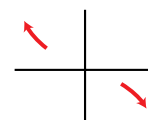
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$



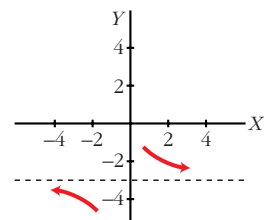
e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$



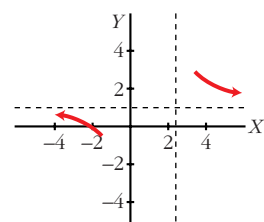
f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3$



h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1$



13 Dada la función  $y = \frac{2x}{1-x}$ , halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1-x}$

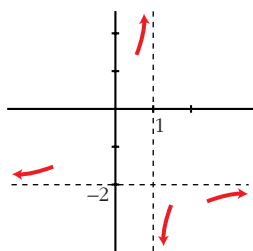
d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1-x}$

a)  $+\infty$

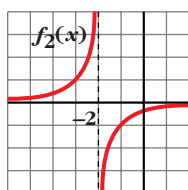
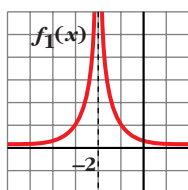
b)  $-\infty$

c)  $-2$

d)  $-2$



14



Éstas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

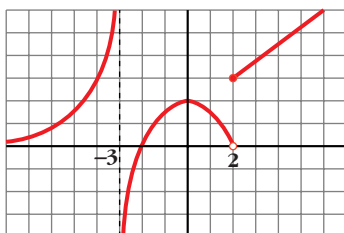
¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando  $x \rightarrow -2$ ?

• Observa la función cuando  $x \rightarrow -2$  por la izquierda y por la derecha.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f_2(x)$$

15



Sobre la gráfica de la función  $f(x)$ , halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

h)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

a)  $+\infty$

b)  $-\infty$

c) 2

d) 0

e) 0

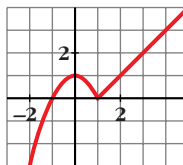
f) 3

g)  $+\infty$

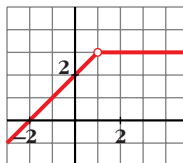
h) 0

**16** Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica y di si son continuas o discontinuas en  $x = 1$ .

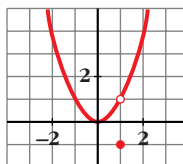
a)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b)  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua

b) Discontinua

c) Discontinua

**17** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

☛ Para que exista límite en el punto de ruptura, tienen que ser iguales los límites laterales.

a) 5

b) 4

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$



**18** Comprueba si la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  es continua en  $x = 0$ .

☛ *Recuerda que para que  $f$  sea continua en  $x = 0$ , debe verificarse que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en  $x = 0$

## Página 165

**19** Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a)  $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$  en  $x = -1$

b)  $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  en  $x = 2$

c)  $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  en  $x = 1$

a) No, pues no existe  $f(-1)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -2$ . Sí es continua en  $x = 2$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ . No es continua en  $x = 1$ .

## PARA RESOLVER

**20** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$

c)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{3b^3 - 2b^2}{b}$

d)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2 - 7b}{4b}$

☛ *Saca factor común y simplifica cada fracción.*

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-2)} = -2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3$

c)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2(3b-2)}{b} = 0$

d)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b(b-7)}{4b} = -\frac{7}{4}$

**21** Resuelve los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = -3$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = -\frac{1}{4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 3$

e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = -\frac{1}{2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = 2$

**22** Resuelve los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x - 1)^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x - 2)^2$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{(2x + 1)^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{5x}$

a) 3

b)  $-\infty$

c) 0

d)  $+\infty$

**23** Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones y representa las ramas que obtengas:

a)  $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

b)  $f(x) = 10x - x^3$

c)  $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

d)  $f(x) = \frac{1 - 12x^2}{3x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$



**24** Calcula el límite de la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x}$  en  $x = 3$ ,  $x = 0$  y  $x = -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

**25** Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:

a)  $f(x) = \frac{3x}{2x + 4}$

b)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

d)  $f(t) = \frac{t^3 - 2t^2}{t^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

c)  $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

d)  $f(t) = \frac{t^2(t-2)}{t^2}$ ;  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -2$

**26** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva con respecto a ellas:

a)  $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

b)  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

c)  $f(x) = \frac{1}{2-x}$

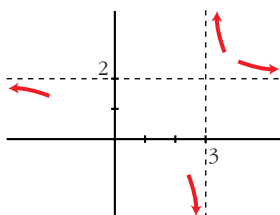
d)  $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$

e)  $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

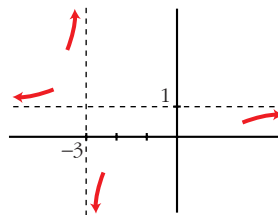
f)  $f(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$

a) Asíntota vertical:  $x = 3$

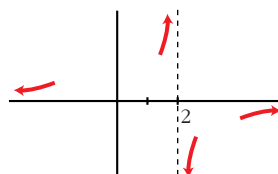
Asíntota horizontal:  $y = 2$



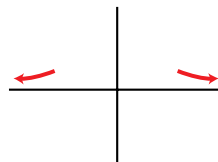
- b) Asíntota vertical:  $x = -3$   
 Asíntota horizontal:  $y = 1$



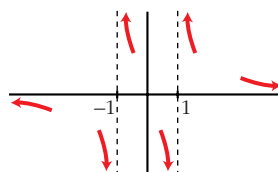
- c) Asíntota vertical:  $x = 2$   
 Asíntota horizontal:  $y = 0$



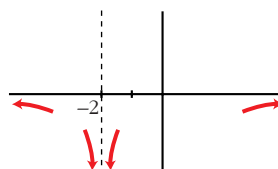
- d) Asíntota vertical:  $y = 0$   
 No tiene más asíntotas.



- e) Asíntota vertical:  $x = 1, x = -1$   
 Asíntota horizontal:  $y = 0$



- f) Asíntota vertical:  $x = -2$   
 Asíntota horizontal:  $y = 0$



**27** Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a)  $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

b)  $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c)  $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$

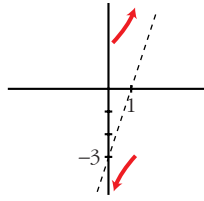
d)  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e)  $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$

f)  $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

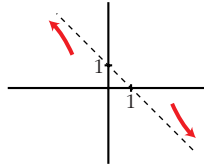
$$a) \frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$$

Asíntota oblicua:  $y = 3x - 3$



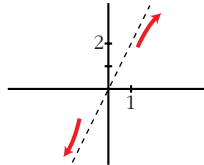
$$b) \frac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \frac{3}{x}$$

Asíntota oblicua:  $y = -x + 1$



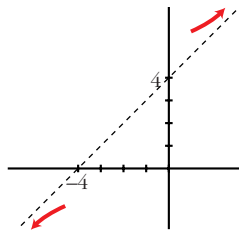
$$c) \frac{4x^2-3}{2x} = 2x - \frac{3}{2x}$$

Asíntota oblicua:  $y = 2x$



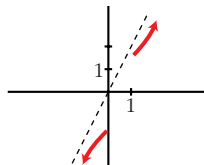
$$d) \frac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \frac{10}{x-3}$$

Asíntota oblicua:  $y = x + 4$



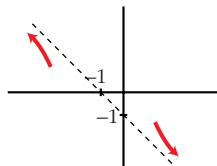
$$e) \frac{2x^3-3}{x^2-2} = 2x + \frac{4x-3}{x^2-2}$$

Asíntota oblicua:  $y = 2x$



$$f) \frac{-2x^2+3}{2x-2} = -x - 1 + \frac{1}{2x-2}$$

Asíntota oblicua:  $y = -x - 1$



**28** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a)  $y = \frac{3-x}{2x+1}$

b)  $y = \frac{5x-2}{2x-7}$

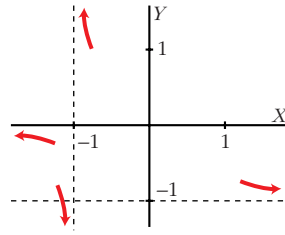
c)  $y = \frac{x+2}{x^2-1}$

d)  $y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$

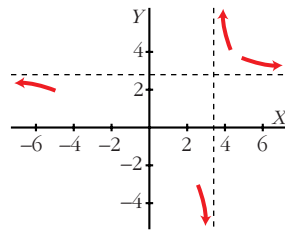
e)  $y = \frac{x}{x^2-4}$

f)  $y = \frac{3x^2}{x+2}$

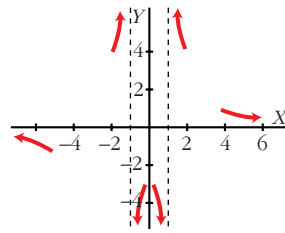
a) Asíntotas:  $y = -\frac{1}{2}$ ;  $x = -\frac{1}{2}$



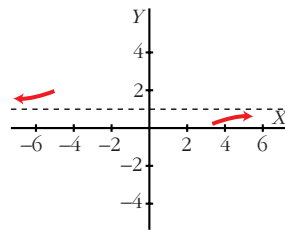
b) Asíntotas:  $y = \frac{5}{2}$ ;  $x = \frac{7}{2}$



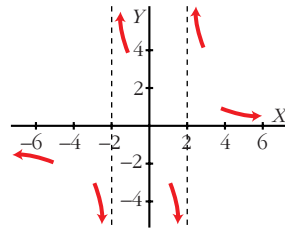
c) Asíntotas:  $y = 0$ ;  $x = \pm 1$



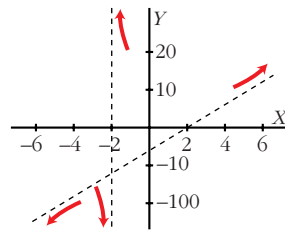
d) Asíntotas:  $y = 1$



e) Asíntotas:  $y = 0$ ;  $x = \pm 2$



f) Asíntotas:  $x = -2$ ;  $y = 3x - 6$



**29** Halla las ramas infinitas de estas funciones. Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva:

a)  $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$

b)  $y = \frac{(x + 3)^2}{x - 2}$

c)  $y = \frac{1}{9 - x^2}$

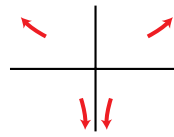
d)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

e)  $y = \frac{2x^2}{x + 3}$

f)  $y = \frac{x^3}{2x - 5}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

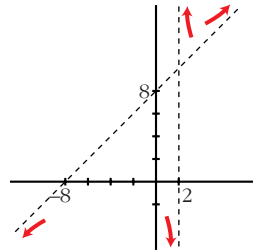
Asíntota vertical:  $x = 0$



b)  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2} = x + 8 + \frac{25}{x - 2}$

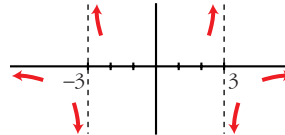
Asíntota vertical:  $x = 2$

Asíntota oblicua:  $y = x + 8$

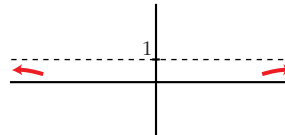


c) Asíntotas verticales:  $x = 3, x = -3$

Asíntota horizontal:  $y = 0$

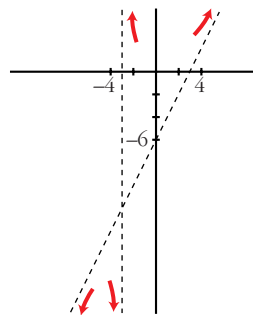


d) Asíntota horizontal:  $y = 1$



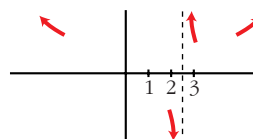
e) Asíntota vertical:  $x = -3$

Asíntota oblicua:  $y = 2x - 6$



f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical:  $x = \frac{5}{2}$



## Página 166

- 30** Prueba que la función  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$  solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

☛ Al ballar  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  verás que no es  $\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

Asíntota vertical:  $x = 0$

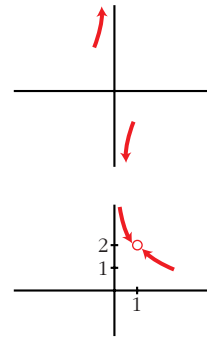
Asíntota horizontal:  $y = 1$

- 31** Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = 2$

- 32** Estudia el comportamiento de estas funciones en los puntos en los que no están definidas:

a)  $y = \frac{1}{(1-x)^2}$

b)  $y = \frac{x}{x-5}$

c)  $y = \frac{1}{x^2-2x}$

d)  $y = \frac{1}{x^2-4}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} y = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$



**33** Halla las asíntotas de las funciones:

a)  $y = \frac{3x^2}{x^2 - 1}$

b)  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

c)  $y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 3}$

d)  $y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

e)  $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

f)  $y = x + 1 + \frac{5}{x}$

a)  $y = 3, x = \pm 1$

b)  $x = 0, y = x$

c)  $y = 2, x = 1, x = 3$

d)  $y = 0, x = \pm 1$

e)  $x = 5, y = x$

f)  $x = 0, y = x + 1$

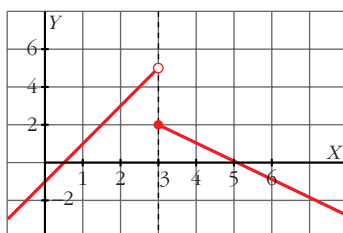
**34** Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

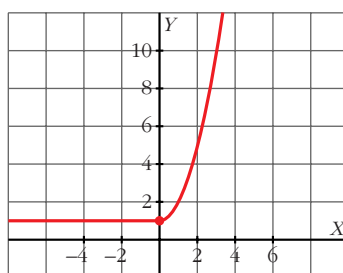
b)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

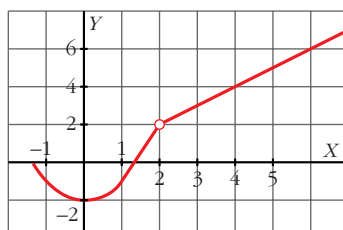
a) Discontinua en  $x = 3$ .



b) Función continua.



c) Discontinua en  $x = 2$ .



**35** a) Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior en  $x = -3$  y  $x = 5$ .

b) Halla, en cada una de ellas, el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -7$ ;  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 26$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 7$ ;  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

**36** Calcula los límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = 2^{x-1}$

b)  $f(x) = 0,75^x$

c)  $f(x) = 1 + e^x$

d)  $f(x) = 1/e^x$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

**37** Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales:

a)  $y = 2^{x+3}$

b)  $y = 1,5^x - 1$

c)  $y = 2 + e^x$

d)  $y = e^{-x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ :  $y = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ :  $y = -1$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ :  $y = 2$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ :  $y = 0$

**38** Calcula, en cada caso, el valor de  $k$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + k \end{array} \right\} 5 = 3 + k \Rightarrow k = 2$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array} \right\} 5 = 4 + 2k \Rightarrow k = 1/2$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \\ f(0) = k \end{array} \right\} k = 1$$

**39 Estudia la continuidad de estas funciones:**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \Rightarrow \text{Continua en } x = 1 \\ x \neq 1 \Rightarrow \text{Continua} \end{array} \right\} \text{Es continua en } \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = 1 \\ x \neq 1 \text{ y } x \neq -1 \Rightarrow \text{Continua} \end{array} \right\} \text{Es continua en } \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \Rightarrow \text{Discontinua en } x = 0$$

Si  $x \neq 0$ , es continua.

**40** Calcula  $a$  para que las siguientes funciones sean continuas en  $x = 1$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - a \end{array} \right\} 2 = 4 - a \Rightarrow a = 2$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array} \right\} a = 2$$

**41** En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función  $M(t) = \frac{30t}{t+4}$  ( $t$  en días).

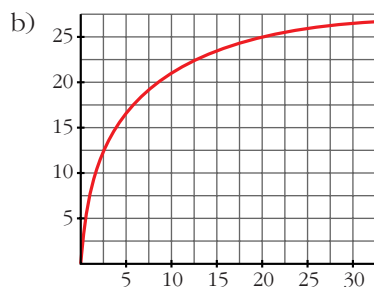
a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si nunca acabara el entrenamiento?

a)  $M(1) = 6$  montajes el primer día.

$M(10) = 21,43 \rightarrow 21$  montajes el décimo día.



c) Se aproxima a 30 (pues  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$ ).

## Página 167

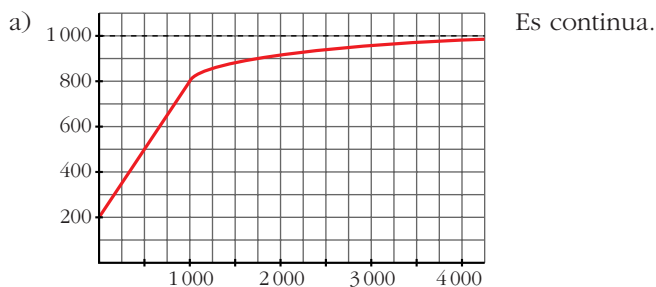
**42** El gasto mensual en alimentación de una familia depende de su renta,  $x$ . Así:

$$g(x) = \begin{cases} 0,6x + 200 & \text{si } 0 \leq x \leq 1000 \\ 1000x/(x + 250) & \text{si } x > 1000 \end{cases}$$

donde los ingresos y los gastos vienen expresados en euros.

a) Representa  $g(x)$  y di si es función continua.

b) Calcula el límite de  $g(x)$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y explica su significado.



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1000.$

Como máximo gastan 1000 € al mes en alimentación.

## CUESTIONES TEÓRICAS

**43** ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

Sí se puede calcular, pero no puede ser continua.

**44** ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí. Por ejemplo,  $f(x) = \frac{1}{x - x^2}$  tiene  $x = 0$  y  $x = 1$  como asíntotas verticales.

**45** El denominador de una función  $f(x)$  se anula en  $x = a$ . ¿Existe necesariamente una asíntota vertical en  $x = a$ ? Pon ejemplos.

No. Por ejemplo,  $f(x) = \frac{3x^2 + x}{x}$  en  $x = 0$ ; puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x + 1)}{x} = 1$$

**46** ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales?

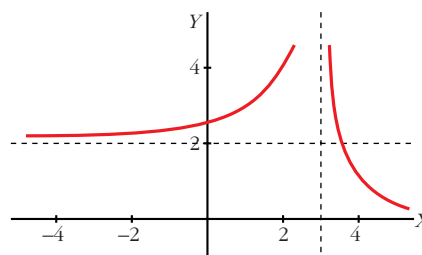
Sí.

**47** Representa una función que cumpla estas condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

¿Es discontinua en algún punto?

Sí, es discontinua al menos en  $x = 3$ .



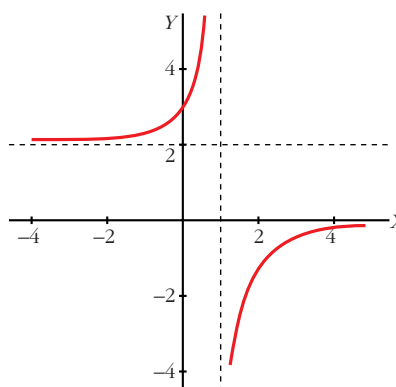
**48** Representa una función que verifique estas condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$



**49** Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ , ¿podemos afirmar que  $f$  es continua en  $x = 2$ ?

No. Para que fuera continua debería ser, además,  $f(2) = 5$ .

**50** ¿Existe algún valor de  $k$  para el cual la función  $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$  sea continua en  $x = 0$ ? Justifica tu respuesta.

No, puesto que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

### PARA PROFUNDIZAR

**51** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x|} = 3$$

**52** Puesto que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x) = +\infty$  halla un valor de  $x$  para el cual  $x^2 - 3x$  sea mayor que 5 000.

Por ejemplo, para  $x = 100$ ,  $f(x) = 9\,700$ .

**53** Halla un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = \frac{1}{3x-5}$  sea menor que 0,001.

Por ejemplo, para  $x = 1\,000$ ,  $f(x) = 0,00033$ .

**54** Halla los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^3)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} 0,75^x - x$$

a)  $-\infty$

b)  $+\infty$

c) 0

d)  $+\infty$

**55** ¿Cuál es la asíntota vertical de estas funciones logarítmicas? Halla su límite cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$a) y = \log_2(x-3)$$

$$b) y = \ln(x+2)$$

a) Asíntota vertical:  $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Asíntota vertical:  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

## PARA PENSAR UN POCO MÁS

**56** Raquel quiere subir en bicicleta al mirador de la montaña y luego bajar, de modo que la velocidad media con la que realice el recorrido de ida y vuelta sea de 40 km/h. Ya ha subido y lo ha hecho a 20 km/h. Se pregunta a qué velocidad deberá bajar para conseguir su objetivo.

- a) Halla la velocidad media final para velocidades de bajada de 60, 80, 100 y 200 km/h.
- b) Halla la expresión de la velocidad media final,  $V$ , para una velocidad de bajada de  $x$  km/h.
- c) Comprueba que la velocidad media deseada, 40 km/h, es el límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V$ . ¿Qué significa esto?
- d) Vuelve sobre el enunciado razonando del siguiente modo: si la velocidad media en la subida es la mitad de la deseada es porque el tiempo empleado ha sido el doble, es decir, el tiempo que tardó en subir es tanto como tenía para subir y bajar. Se ha quedado sin tiempo. ¡Ha de bajar a velocidad infinita!

a)

VELOCIDAD DE BAJADA	60	80	100	200
VELOCIDAD MEDIA FINAL	30	32	33,33	36,36

b) Llamamos  $d$  = distancia que tiene que recorrer en la subida. Por tanto, entre la subida y la bajada recorre  $2d$ .

$$\text{Recordamos que: velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

El tiempo que tarda en total será el que tarda en subir (a 20 km/h) más el que tarda en bajar (a  $x$  km/h):

$$\frac{d}{20} + \frac{d}{x} = d \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{x} \right) = d \left( \frac{x + 20}{20x} \right)$$

c) La velocidad media final será entonces:

$$V = \frac{2d}{t} = \frac{2d}{d \left[ (x + 20)/20x \right]} = \frac{2 \cdot 20x}{x + 20} = \frac{40x}{x + 20} \rightarrow V(x) = \frac{40x}{x + 20}$$

$$\text{Por tanto: } \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 40$$