

3

ÁLGEBRA

Página 68

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

1. Tres amigos, Antonio, Juan y Pablo, fueron con sus tres hijos, Julio, José y Luis, a un almacén de frutos secos. Ante un saco de almendras, el dueño les dijo:

—Coged las que queráis.

Cada uno de los seis metió la mano en el saco un número n de veces y, cada vez, se llevó n almendras (es decir, si uno de ellos metió la mano en el saco 9 veces, cada vez cogió 9 almendras, y, por tanto, se llevó 81 almendras). Además, cada padre cogió, en total, 45 almendras más que su hijo.

Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, y Julio, 15 más que Pablo.

- ¿Cómo se llama el hijo de Antonio?
- ¿Y el de Juan?
- ¿Cuántas almendras se llevaron entre todos?

- 2º caso: 15×3

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 18 \rightarrow x = 9 \\ \text{Restando: } 2y = 12 \rightarrow y = 6 \end{array}$$

Esto significa que otro de los padres cogió 9 puñados de 9 almendras (81 almendras) y su hijo, 6 puñados de 6 almendras (36 almendras).

- 3º caso: 45×1

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 45 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 46 \rightarrow x = 23 \\ \text{Restando: } 2y = 44 \rightarrow y = 22 \end{array}$$

Uno de los padres se llevó 23 puñados de 23 almendras (529 almendras) y su hijo, 22 puñados de 22 almendras (484 almendras).

Como Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, Antonio cogió 9 puñados y Luis 2 puñados.

Como Julio metió la mano 15 veces más que Pablo, Julio cogió 22 puñados y Pablo 7 puñados.

Por tanto:

- Antonio se lleva 9 puñados y José 6.
- Juan coge 23 puñados y Julio 22.
- Pablo se lleva 7 puñados y Luis 2.
- El hijo de Antonio es José, el de Juan es Julio y el de Pablo es Luis.

Por último, el número total de almendras que se llevaron entre todos será:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1\,183 \text{ almendras}$$

Página 69

Problema 2

2. Un galgo persigue a una liebre.

La liebre lleva 30 de sus saltos de ventaja al galgo. Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres. Tres saltos del galgo equivalen a cinco de la liebre. ¿Cuántos saltos dará cada uno hasta el momento de la captura?

Cada 2 saltos de galgo y 3 de liebre se acerca 1 u el galgo.

Cada 2 · 2 saltos de galgo y 3 · 2 de liebre se acerca 2 u el galgo.

Cada 2 · 3 saltos de galgo y 3 · 3 de liebre se acerca 3 u el galgo.

... ..

Cada 2 · 90 saltos de galgo y 3 · 90 de liebre se acerca 90 u el galgo.

Como la liebre lleva 30 de sus saltos al galgo (90 u de ventaja), serán:

$$2 \cdot 90 = 180 \text{ saltos el galgo}$$

$$3 \cdot 90 = 270 \text{ saltos la liebre}$$

De esta forma el galgo recorre $180 \cdot 5 u = 900 u$; y la liebre $270 \cdot 3 u = 810 u$.

Como tenía 90 de ventaja: $810 + 90 = 900 u$

Por tanto, hasta el momento de la captura el galgo da 180 saltos y la liebre 270.

Página 71

1. Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

2	1	-9	24	-20
2		2	-14	20
2	1	-7	10	0
2		2	-10	
	1	-5		0

$$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)^2(x - 5)$$

$$b) x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\ & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & 0 \\ & & -1 & 3 & 2 & 8 & \\ \hline 4 & 1 & -3 & -2 & -8 & 0 & \\ & & 4 & 4 & 8 & & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

$$x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

no tiene solución

$$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x-1)(x+1)(x-4)(x^2+x+2)$$

$$c) x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -1 & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\ & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\ \hline -3 & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\ \hline -3 & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & 0 & \\ & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \end{array}$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{no tiene solución}$$

$$\text{Así, } x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x+3)^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

2. a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^4 - x^3 - x^2} \quad \quad \quad x^2 + 3x + 4 \\ 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 \\ \underline{-3x^3 - 3x^2 - 3x} \\ 4x^2 + 4x + 4 \\ \underline{-4x^2 - 4x - 4} \\ 0 \end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución). Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3. Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Hazlo ahora sabiendo que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces del polinomio.

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1/2 & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\ & & -3 & -2 & -2 & 1 \\ \hline & 6 & 4 & 4 & -2 & 0 \\ 1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 6 & 6 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6x + 6 &= 0 \\ 6(x^2 + x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \quad \text{no tiene solución}$$

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) 6(x^2 + x + 1) = (2x + 1)(3x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Página 73

1. Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas: $\frac{x+7}{x}$; $\frac{x-2}{x^2+x}$; $-\frac{2x+1}{x+1}$

$$\left. \begin{array}{l} x = x \\ x^2 + x = x(x+1) \\ x + 1 = x + 1 \end{array} \right\} \quad m \cdot c \cdot m = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\begin{aligned} \frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} &= \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} = \\ &= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x} \end{aligned}$$

2. Efectúa: $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1} = \frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

Página 74

3. Efectúa estas operaciones:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \cdot \frac{2x + 3}{x + 5}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} : \frac{2x + 3}{x + 5}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \cdot \frac{2x + 3}{x + 5} &= \frac{(x^2 - 2x + 3)(2x + 3)}{(x - 2)(x + 5)} = \\ &= \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 6x + 6x + 9}{x^2 + 5x - 2x - 10} = \frac{2x^3 - x^2 + 9}{x^2 + 3x - 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} : \frac{2x + 3}{x + 5} &= \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \cdot \frac{x + 5}{2x + 3} = \frac{(x^2 - 2x + 3)(x + 5)}{(x - 2)(2x + 3)} = \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 5x^2 - 10x + 15}{2x^2 + 3x - 4x - 6} = \frac{x^3 + 3x^2 - 7x + 15}{2x^2 - x - 6} \end{aligned}$$

4. Calcula:

$$\text{a) } \frac{x + 2}{x} : \left(\frac{x - 1}{3} \cdot \frac{x}{2x + 1} \right)$$

$$\text{b) } \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^4 + x^2}{x^4}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x + 2}{x} : \left(\frac{x - 1}{3} \cdot \frac{x}{2x + 1} \right) &= \frac{x + 2}{x} : \frac{(x - 1)x}{3(2x + 1)} = \frac{x + 2}{x} \cdot \frac{3(2x + 1)}{(x - 1)x} = \\ &= \frac{3(2x + 1)(x + 2)}{x^2(x - 1)} = \frac{3(2x^2 + 4x + x + 2)}{x^3 - x^2} = \\ &= \frac{6x^2 + 15x + 6}{x^3 - x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^4 + x^2}{x^4} &= \frac{(x^4 - x^2)(x^4 + x^2)}{(x^2 + 1)x^4} = \frac{x^8 - x^4}{x^6 + x^4} = \frac{x^4(x^4 - 1)}{x^4(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1 \end{aligned}$$

Página 75

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$\text{b) } x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$\text{a) } x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 2 \text{ y } -2$$

$$\text{b) } x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 3 \text{ y } -3$$

2. Resuelve:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$$a) x^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} \begin{cases} -1 \rightarrow (\text{no vale}) \\ -9 \rightarrow (\text{no vale}) \end{cases}$$

No tiene solución.

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - y - 2 = 0$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} y = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{No vale} \\ y = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

Página 76

1. Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8+2x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$$1 + x^2 - 2x = 2x - 3; x^2 - 4x + 4 = 0; x = 2 \text{ (no vale)}$$

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$$

$$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$$

$$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$$

$$x^2 - 116x + 228 = 0; x = \frac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \rightarrow (\text{no vale}) \end{cases}$$

$$x = 114$$

c) $\sqrt{x} = x - 2; x = x^2 + 4 - 4x; 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \rightarrow (\text{no vale}) \end{cases}$$

$$x = 4$$

d) $2 - x = \sqrt{x}; 4 + x^2 - 4x = x; x^2 - 5x + 4 = 0$

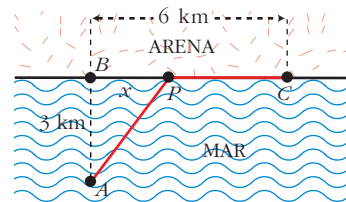
$$x = \begin{cases} 4 \rightarrow (\text{no vale}) \\ 1 \end{cases}$$

$$x = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \sqrt{3x+3} - 1 &= \sqrt{8-2x} \\
 3x+3 &= 1+8-2x+2\sqrt{8-2x} \\
 5x-6 &= 2\sqrt{8-2x} \\
 25x^2+36-60x &= 4(8-2x) \\
 25x^2-52x+4 &= 0 \\
 x &= \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x=2 \\ x=0,08 \rightarrow \text{no vale} \end{cases} \\
 \text{Así, } x &= 2.
 \end{aligned}$$

- 2. Para ir de A hasta C hemos navegado a 4 km/h en línea recta hasta P, y hemos caminado a 5 km/h de P a C. Hemos tardado, en total, 99 minutos (99/60 horas).**

¿Cuál es la distancia, x, de B a P?



$$\left. \begin{aligned} \overline{AP}^2 &= x^2 + 9 \\ \overline{PC} &= 6 - x \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2+9}}{4} &= t \\ \frac{6-x}{5} &= \left(\frac{99}{60} - t\right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{x^2+9}}{4} \\ t &= -\frac{6-x}{5} + \frac{99}{60} \end{aligned} \right\} \frac{\sqrt{x^2+9}}{4} = -\frac{6-x}{5} + \frac{99}{60}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+9}}{4} + \frac{6-x}{5} = \frac{99}{60}$$

$$15\sqrt{x^2+9} + 12(6-x) = 99$$

$$15\sqrt{x^2+9} + 72 - 12x = 99$$

$$15\sqrt{x^2+9} = 12x + 27$$

$$225(x^2+9) = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$225x^2 + 2025 = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$81x^2 - 648x + 1296 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

Así, la distancia de B a P es de 4 km.

Página 77

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$$

$$\text{b) } \frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$$

$$\text{c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{a) } 10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$$

$$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$$

$$0 = 3x^2 - 11x - 30$$

$$x = \frac{11 \pm 21,93}{6} = \begin{cases} 5,489 \\ -1,822 \end{cases}$$

$$x_1 = 5,489; \quad x_2 = -1,822$$

$$\text{b) } 12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$$

$$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$$

$$0 = 10x^2 - 38x + 24$$

$$0 = 5x^2 - 19x + 12; \quad x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{c) } 4x + 4 = 3x^2; \quad 0 = 3x^2 - 4x - 4$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{-2}{3}$$

2. Resuelve:

$$\text{a) } \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$$

$$\text{b) } \frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$$

$$\text{a) } x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x^2-1)$$

$$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$$

$$x = 3$$

$$\text{b) } 10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x^2+5x+6)$$

$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$$

$$0 = x^2 + x - 12$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -4$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } & 35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1) \\
& 35(x^2+4x+3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1) \\
& 35x^2+140x+105-35x^2-35 = 26x^2-26 \\
& 26x^2-140x-96 = 0 \\
& x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases} \\
& x_1 = 6; \quad x_2 = \frac{-8}{13}
\end{aligned}$$

Página 79

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{3x} = 0,5^{3x+2}$

b) $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$

d) $7^{x+2} = 5\,764\,801$

a) $2^{3x} = 2^{-3x-2}; \quad 3x = -3x-2; \quad 6x = -2; \quad x = \frac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2} = 3^{-2}; \quad 4-x^2 = -2; \quad x^2 = 6; \quad x = \pm\sqrt{6}$

$x_1 = \sqrt{6}; \quad x_2 = -\sqrt{6}$

c) $\frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186; \quad 2^{2x-2-x-2} = 186; \quad 2^{x-4} = 186$

$\log 2^{x-4} = \log 186; \quad (x-4) \log 2 = \log 186$

$x = 4 + \frac{\log 186}{\log 2} = 11,54$

d) $7^{x+2} = 7^8; \quad x = 6$

2. Resuelve:

a) $3^x + 3^{x+2} = 30$

b) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

c) $2 \log x - \log(x+6) = 3 \log 2$

d) $4 \log_2(x^2+1) = \log_2 625$

a) $3^x + 3^x \cdot 9 = 30$

$3^x(10) = 30; \quad 3^x = 3; \quad x = 1$

b) $5 \cdot 5^x + 5^x + \frac{5^x}{5} = \frac{31}{5}$

$5^x \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{5}; \quad x = 0$

$$c) \log \frac{x^2}{x+6} = \log 8$$

$$x^2 = 8x + 48; \quad x^2 - 8x - 48 = 0; \quad x = \frac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4 \end{cases} \text{ (no vale)}$$

$$x = 12$$

$$d) \log_2(x^2 + 1)^4 = \log_2 5^4; \quad x^2 + 1 = 5; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm 2$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2$$

Página 81

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$

$$x^2 - 9 = 2x - 1; \quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$x_1 = 4; \quad y_1 = 7$$

$$x_2 = -2; \quad y_2 = -5$$

$$b) \begin{cases} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$y = 5 - x$$

$$x(5 - x) = 6; \quad 5x - x^2 = 6; \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad y_1 = 3$$

$$x_2 = 3; \quad y_2 = 2$$

$$c) x = 2y + 1$$

$$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2; \quad \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$$

$$3y+1 = 4 + y+1 + 4\sqrt{y+1}; \quad 2y-4 = 4\sqrt{y+1}; \quad y-2 = 2\sqrt{y+1}$$

$$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4; \quad y^2 - 8y = 0$$

$$y = 8 \rightarrow x = 17$$

$$y = 0 \text{ (no vale)}$$

$$x = 17; \quad y = 8$$

2. Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$$

$$\text{a) } y = 1 - x; \quad x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$$

$$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21; \quad x^2 - x - 20 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$x_1 = -4; \quad y_1 = 5$$

$$x_2 = 5; \quad y_2 = -4$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 27 + y \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$10y = 27 + y; \quad 9y = 27; \quad y = 3$$

$$\frac{x}{y} = 10; \quad x = 10y; \quad x = 30$$

$$x = 30; \quad y = 3$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log \frac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{cases}$$

$$x = 2y + 1$$

$$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$$

$$4y^2 + 5y - 9 = 0$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{8} = \frac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad y_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{-7}{2}; \quad y_2 = \frac{-9}{4}$$

Página 82

1. Reconoce como escalonados y resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x & = & 7 \\ 2x - 3y & = & 8 \\ 3x + y - z & = & 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y & = & 0 \\ 2y & = & -6 \\ 5x + y - z & = & 17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x & = -3 \\ 5y & = 20 \\ 2x + y - z & = -2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y & = 4 \\ x - z & = 11 \\ y - z & = 7 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = \frac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \frac{-6}{2} - 3 \\ x = \frac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

$$\text{a) } \begin{cases} y & = -5 \\ 2z & = 8 \\ 3x & = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - z & = -3 \\ 3x + y & = -5 \\ 5y & = -10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 5y + 3z & = 8 \\ 3y - z & = 5 \\ 4z & = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x + y - z & = 7 \\ 2y & = 8 \\ 3x & = 9 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \frac{-10}{5} = -2 \\ x = \frac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$$

$$c) \left. \begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases} \right\} \begin{cases} z = 1 \\ y = \frac{5+z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 8 + 10 - 3 = 15 \end{cases} \left. \right\} \begin{cases} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$d) \left. \begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases} \right\} \begin{cases} x = \frac{9}{3} = 3 \\ y = \frac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{cases} \left. \right\} \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{cases}$$

Página 83

3. Resuelve por el método de Gauss:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \right\} \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{matrix} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{cases} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{cases} \right\} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$b) \left. \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases} \right\} \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{matrix} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} x = \frac{20}{5} = 4 \\ y = \frac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{cases} \right\} \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

4. Resuelve:

$$a) \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \right\} \begin{matrix} 1^a + 4 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{cases} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{cases} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a : 2 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \right\} \begin{cases} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 3^a : 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{-1+x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ z = \frac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \frac{2x + 4z + 1}{5} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$$

Página 84

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x + 2 \leq 10$

b) $x - 5 > 1$

a) $3x + 2 \leq 10 \rightarrow 3x \leq 8 \rightarrow x \leq \frac{8}{3}$

Soluciones: $\left\{ x / x \leq \frac{8}{3} \right\} = \left(-\infty, \frac{8}{3} \right]$

b) $x - 5 > 1 \rightarrow x > 6$

Soluciones: $\{ x / x > 6 \} = (6, +\infty)$

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} 3x + 2 \leq 10 \\ x - 5 > 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

a) $\left. \begin{array}{l} 3x \leq 8 \rightarrow x \leq 8/3 \\ x > 6 \end{array} \right\}$ No tiene solución

b) $\left. \begin{array}{l} 2x \geq 11 \rightarrow x \geq 11/2 \\ 3x \leq 14 \rightarrow x \leq 14/3 \end{array} \right\}$ No tiene solución

Página 85

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

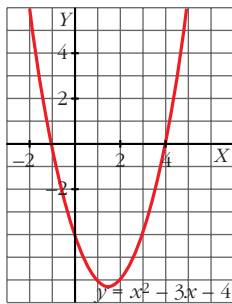
a) $x^2 - 3x - 4 < 0$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c) $x^2 + 7 < 0$

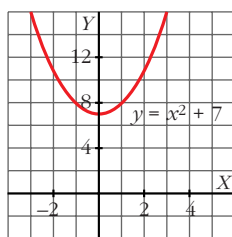
d) $x^2 - 4 \leq 0$

a) $x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ intervalo $(-1, 4)$



b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c) $x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No tiene solución



d) $x^2 - 4 \leq 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje x en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje x en $x = -2$ y en $x = 2$.

Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

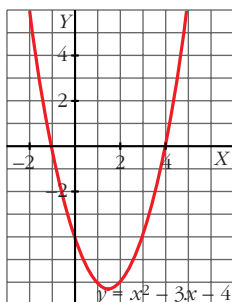
a)
$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$$

a) $2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$



b)
$$\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$$

- Las soluciones de la primera inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).

- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

Página 90

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Ecuaciones

1 Resuelve:

$$a) 7 - \frac{x+4}{3} + \frac{x}{3} = \frac{5x+8}{27} - \frac{5(x+11)}{9}$$

$$b) \left(3x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(3x + \frac{2}{3}\right) - 4 = (3x-5)^2 + \frac{5}{9}$$

$$c) \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}} + \frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3+x}}{\sqrt{3}} - 1$$

$$a) 189 - 9x - 36 + 9x = 5x + 8 - 15x - 165$$

$$10x = -310 \Rightarrow x = -31$$

$$b) 9x^2 - \frac{4}{9} - 4 = 9x^2 + 25 - 30x + \frac{5}{9}$$

$$30x = 30 \Rightarrow x = 1$$

$$c) \sqrt{15} - \sqrt{3}x + \sqrt{5}x - \sqrt{5} = 2\sqrt{15} + \sqrt{5}x - \sqrt{15}$$

$$\sqrt{3}x = -\sqrt{5}; x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$$

2 Entre estas seis ecuaciones de primer grado, hay dos que no tienen solución, dos que tienen infinitas soluciones y dos que tienen solución única. Identifica cada caso y resuelve las que sea posible:

$$a) \frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$$

$$b) x + \frac{3-x}{3} - 1 = \frac{2}{3}x$$

$$c) \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$$

$$d) 0,2x + 0,6 - 0,25(x-1)^2 = 1,25x - (0,5x+2)^2$$

$$e) (5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$$

$$f) \frac{2x+1}{7} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}$$

a) $2x + 2 = 4x - 2x - 3; 5 = 0$

No tiene solución.

b) $3x + 3 - x - 3 = 2x; 0 = 0$

Infinitas soluciones.

c) $\frac{x^2 + 1 + 2x}{16} - \frac{8 + 8x}{16} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{16} - \frac{8 + 4x}{16}$

$2x - 8 - 8x = -2x - 8 - 4x; 0 = 0$

Infinitas soluciones.

d) $0,2x + 0,6 - 0,25(x^2 + 1 - 2x) = 1,25x - (0,25x^2 + 4 + 2x)$

$0,2x + 0,6 - 0,25x^2 - 0,25 + 0,5x = 1,25x - 0,25x^2 - 4 - 2x$

$1,45x = -4,35$

$x = -3$

e) $25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x; 9 = 0$

No tiene solución.

f) $4x + 2 - 7(x^2 - x - 2) = 7x - 14 - 7(x^2 + 4 - 4x)$

$4x + 2 - 7x^2 + 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$

$58 = 24x$

$x = \frac{29}{12}$

3

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \frac{x^2 + 2}{2}$

b) $0,5(x - 1)^2 - 0,25(x + 1)^2 = 4 - x$

c) $(0,5x - 1)(0,5x + 1) = (x + 1)^2 - 9$

d) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 - \frac{x + 1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x - 1}{4}$

e) $x^2 - 2x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$

f) $x^2 - x - 2 - \sqrt{2} = 0$

g) $\frac{x(x - 3)}{2} + \frac{x(x + 2)}{4} = \frac{(3x - 2)^2}{8} + 1$

h) $0,3x^2 - x - 1,3 = 0$

➡ **Expresa los decimales periódicos en forma de fracción y obtendrás soluciones enteras.**

a) $2x^2 - 2 + 6(x^2 + 4 - 4x) = 3x^2 + 6$

$2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$

$5x^2 - 24x + 16 = 0$

$x = \frac{24 \pm 16}{10} = \begin{cases} 4 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 4; x_2 = \frac{4}{5}$

$$b) 0,5(x^2 + 1 - 2x) - 0,25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$$

$$0,5x^2 + 0,5 - x - 0,25x^2 - 0,25 - 0,5x = 4 - x$$

$$0,25x^2 - 0,5x - 3,75 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_1 = -3; x_2 = 5$$

$$c) 0,25x^2 - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$0 = 0,75x^2 + 2x - 7$$

$$x = \frac{-2 \pm 5}{1,5} = \begin{cases} 2 \\ -70/15 = -14/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{14}{3}$$

$$d) \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{4} + 4 - 2x \right) - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{2x-2}{8}$$

$$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2; 3x^2 - 23x + 44 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 4; x_2 = \frac{11}{3}$$

$$e) x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8\sqrt{3} + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 - 8\sqrt{3}}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = 1 \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \stackrel{*}{=} \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \stackrel{*}{=} 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \stackrel{*}{=} \sqrt{3}; x_2 = 1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \stackrel{*}{=} 2 - \sqrt{3}$$

* Esta igualdad se podría probar viendo que: $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

$$f) x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2 - \sqrt{2})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8 + 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2} \stackrel{*}{=} 1 + \sqrt{2} \\ \frac{1 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2} \stackrel{*}{=} -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2} \approx 1 + \sqrt{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{2} \approx -\sqrt{2}$$

* Esta igualdad se podría probar viendo que: $(1 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 4\sqrt{2}$

g) $4x(x - 3) + 2x(x + 2) = 9x^2 + 4 - 12x + 8$

$$4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x = 9x^2 + 4 - 12x + 8$$

$$0 = 3x^2 - 4x + 12 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

h) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{3} - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1$$

4 Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:

👉 Recuerda que: $ax^2 + c = 0$ se resuelve despejando x . $ax^2 + bx = 0$ se resuelve sacando factor común e igualando a cero cada factor.

a) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$

b) $\frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$

c) $\frac{3x + 1}{3} - \frac{5x^2 + 3}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 2}{3}$

d) $\frac{3x^2 - 1}{4} + \frac{1}{2} \left[x^2 - 2 - \frac{1}{2}x \right] = \frac{x^2 - 5}{4}$

e) $(x - a)^2 + x(x + b) = 8b^2 - x(2a - b) + a^2$

f) $\frac{x(x - 2)}{4} + \frac{x - 4}{3} = \frac{x - 3}{2} + \frac{x + 1}{6}$

a) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$

$$0 = 2x^2 - 8; \quad x^2 = 4$$

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 2$$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$$x^2 - 13x = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 13$$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$$0 = 18x^2 - 8x; \quad 2x(9x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{4}{9}$$

$$d) 3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$$

$$4x^2 - x = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{4}$$

$$e) x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + bx = 8b^2 - 2ax + bx + a^2$$

$$2x^2 = 8b^2; x^2 = 4b^2; x = \pm 2b$$

$$x_1 = 2b; x_2 = -2b$$

$$f) 3x^2 - 6x + 4x - 16 = 6x - 18 + 2x + 2$$

$$3x^2 - 10x = 0; x(3x - 10) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{10}{3}$$

5 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas:

$$a) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$b) x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$c) x^4 + 3x^2 + 2 = 0$$

$$d) x^4 - 9x^2 + 8 = 0$$

$$a) x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 1; x_4 = -1$$

$$b) x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \text{ (no vale)}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1$$

$$c) x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

$$d) x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2\sqrt{2}; x_4 = -2\sqrt{2}$$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$$

$$b) x + \sqrt{7 - 3x} = 1$$

$$c) \sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$$

$$d) \sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 5} = 0$$

$$e) \sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$$

$$f) \sqrt{\frac{7x + 1}{4}} = \frac{5x - 7}{6}$$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$; $0 = 4x^2 + 7x + 3$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{-7 \pm 1}{8} = \begin{cases} -1 \\ -3/4 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{3}{4}$$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$; $0 = x^2 + x - 6$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$$

$$x = -3$$

c) $2 - 5x = 3x^2$; $0 = 3x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no vale)} \\ -2 \end{cases}$$

$$x = -2$$

d) $2x + 3 = x - 5$; $x = -8$ (no vale)

No tiene solución.

e) $5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$$3x - 22 = -8\sqrt{2x}$$

$$9x^2 + 484 - 132x = 64 \cdot 2x; 9x^2 - 260x + 484 = 0$$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ 2 \end{cases}$$

$$x = 2$$

f) $\frac{7x + 1}{4} = \frac{25x^2 + 49 - 70x}{36}$

$$63x + 9 = 25x^2 + 49 - 70x; 0 = 25x^2 - 133x + 40$$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x = 5$$

Factorización

7 Descompón en factores estos polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $x^4 - 5x^2 + 4$

c) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

d) $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$

e) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

f) $x^5 - 16x$

g) $4x^2 - 25$

h) $4x^2 + 4x + 1$

- a) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) \rightarrow$ Raíces: $-1, 1, 2$
- b) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) \rightarrow$ Raíces: $1, -1, 2, -2$
- c) $(x - 1)(x + 2)(4x - 10) \rightarrow$ Raíces: $1, -2, \frac{10}{4}$
- d) $(x - 1)(x - 2)(x - 5)(x^2 + x + 1) \rightarrow$ Raíces: $1, 2, 5$
- e) $(x + 2)(x - 2)(2x - 1)(3x - 1) \rightarrow$ Raíces: $-2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
- f) $x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \rightarrow$ Raíces: $0, 2, -2$
- g) $(2x + 5)(2x - 5) \rightarrow$ Raíces: $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$
- h) $(2x + 1)^2 \rightarrow$ Raíz: $-\frac{1}{2}$

Página 91

8 Halla, en cada uno de los siguientes casos, el M.C.D. $[A(x), B(x)]$ y el m.c.m. $[A(x), B(x)]$:

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x - 3)(x + 4)$; $B(x) = x(x - 3)(x + 3)$

M.C.D. = $(x - 3)$

m.c.m. = $x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$

b) $A(x) = (x - 1)(x + 1)^2$; $B(x) = x(x - 1)(x + 1)$

M.C.D. = $(x - 1)(x + 1)$

m.c.m. = $x(x - 1)(x + 1)^2$

c) $A(x) = x^2(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$; $B(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$

M.C.D. = $(x - 1)(x^2 + 1)$

m.c.m. = $x^2(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

9 Resuelve las siguientes ecuaciones, factorizando previamente:

a) $x^3 - 7x - 6 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

e) $x^5 - 16x = 0$

f) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

g) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

a) $x_1 = -1; x_2 = -2; x_3 = 3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \underline{0} \\ -2 & & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -3 & \underline{0} & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & \underline{0} & & \end{array}$$

b) $x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = \frac{5}{2}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -9 & 10 \\ 1 & & 2 & -1 & -10 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & \underline{0} \\ -2 & & -4 & 10 & \\ \hline & 2 & -5 & \underline{0} & \end{array}$$

c) $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = 3$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ 1 & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & \underline{0} \\ -1 & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \underline{0} & \\ 2 & & 2 & -6 & & \\ \hline & 1 & -3 & \underline{0} & & \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & \underline{0} & & & \end{array}$$

d) $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -10 & 9 & -2 \\ 1 & & 3 & -7 & 2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & \underline{0} \\ 2 & & 6 & -2 & \\ \hline & 3 & -1 & \underline{0} & \end{array}$$

e) $x(x^4 - 16) = 0; x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2$

f) $x(x^2 - 3x + 2) = 0; x(x - 1)(x - 2) = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$

g) $x = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \underline{0} \end{array}$$

Fracciones algebraicas

10 Simplifica las fracciones:

$$\text{a) } \frac{9-x^2}{x^2-3x}$$

$$\text{b) } \frac{3x^3-2x^2-7x-2}{x^3-4x}$$

$$\text{a) } \frac{(3-x)(3+x)}{x(x-3)} = \frac{-(3+x)}{x}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ 2 & & 6 & 8 & 2 \\ \hline & 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & & -3 & -1 & \\ \hline & 3 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\frac{(x-2)(x+1)(3x+1)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{3x^2+4x+1}{x^2+2x}$$

11 Opera y simplifica el resultado:

$$\text{a) } \frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2}$$

$$\text{d) } \left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2} \right) : \left(1 + \frac{x}{x+2} \right)$$

$$\text{e) } \left(1 - \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2} \right) : \frac{1}{x+2}$$

$$\text{a) } \frac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } \frac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$

$$\text{c) } \frac{x(x-1) - x(x-2) - x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x^2 - x - x^2 + 2x - x}{(x-2)(x-1)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)} : \frac{x+2+x}{x+2} &= \frac{3x+2}{x(x+2)} \cdot \frac{x+2}{2x+2} = \\ &= \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x(x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \frac{x^2+4+4x-x^2-4x-3}{(x+2)^2} \cdot (x+2) = \frac{1}{x+2}$$

12 Demuestra las siguientes identidades:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x}$$

$$\text{b) } \frac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$$

$$c) \left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) = 2x-5$$

$$a) \left(\frac{1-x+2x}{1-x^2} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{x} \right) = \left(\frac{1+x}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{x} \right) = \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

$$b) \frac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)} : \frac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)} = \frac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)} = 1$$

$$c) \left(\frac{(x-2)^2 - (x-3)^2}{(x-3)(x-2)} \right) : \left(\frac{(x-2) - (x-3)}{(x-3)(x-2)} \right) =$$

$$= \frac{(x-2+x-3)(x-2-x+3)}{(x-3)(x-2)} : \frac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)} =$$

$$= \frac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)} : \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = 2x-5$$

13 Resuelve estas ecuaciones y comprueba la validez de las soluciones:

$$a) \frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$$

$$b) \frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$$

$$c) \frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{2-x}$$

$$d) \frac{x}{x-6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x+6}{6-x}$$

⚡ Ten en cuenta que $2-x = -(x-2)$.

$$e) \frac{3x+1}{x^3} + \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{2x+3}{x^2}$$

$$f) \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}x$$

$$a) 2x+4+6x^2=5x^2+6x$$

$$x^2-4x+4=0; \quad x=2$$

$$b) 8(x-6)+(12-x)(x+6)=x^2-36$$

$$8x-48+12x+72-x^2-6x=x^2-36$$

$$0=2x^2-14x-60$$

$$0=x^2-7x-30$$

$$x = \frac{7 \pm 13}{2} = \begin{cases} 10 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_1 = 10; \quad x_2 = -3$$

$$c) (x-2)^2 = x^2 + (x-1)^2$$

$$x^2+4-4x=x^2+x^2+1-2x$$

$$0=x^2+2x-3$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$$

$$x = -3$$

$$d) 6x - 3(x - 6) = x(x - 6) - 6(x + 6)$$

$$6x - 3x + 18 = x^2 - 6x - 6x - 36$$

$$0 = x^2 - 15x - 54$$

$$x = \frac{15 \pm 21}{2} = \begin{cases} 18 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_1 = -3; x_2 = 18$$

$$e) 3x + 1 + x^2(x + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x$$

$$3x + 1 + x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2 + 3x$$

$$0 = x^2 - 1$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1$$

$$f) x^2 + 2 = 2x^2; 2 = x^2$$

$$x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}$$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

14 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = \sqrt[3]{9}$

☞ *Expresa $\sqrt[3]{9}$ como potencia de base 3.*

b) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

☞ *Multiplícala el primer miembro.*

c) $5 \cdot 7^{-x} = 35$

☞ *Divide los dos miembros por 5.*

d) $(0,5)^x = 16$

☞ *0,5 es una potencia de base 2.*

e) $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$

f) $2^{1/x} = 16$

g) $\frac{3^{3x-2}}{3^{x+3}} = 81$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$

i) $2^x \cdot 5^x = 0,1$

☞ *Recuerda que $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x$.*

a) $3^x = 3^{2/3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $2^{2x+1} = 2^3 \Rightarrow x = 1$

$$c) 7^{-x} = 7 \Rightarrow x = -1$$

$$d) 2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$$

$$e) 7^{x/2} = 7^{-2} \Rightarrow x = -4$$

$$f) 2^{1/x} = 2^4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$g) 3^{3x-2-x-3} = 3^4 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$h) \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow x = 3$$

$$i) 10^x = 10^{-1} \Rightarrow x = -1$$

Página 92

15 Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:

$$a) \frac{1}{e^x} = 27$$

$$b) e^{x-9} = \sqrt{73}$$

$$c) 2^x \cdot 3^x = 81$$

$$d) \frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$$

$$a) \frac{1}{e^x} = 27 \rightarrow \frac{1}{27} = e^x \rightarrow \ln \frac{1}{27} = \ln e^x$$

$$x = \ln \frac{1}{27} = \ln 1 - \ln 27 = 0 - \ln 27 \rightarrow x \approx 3,296$$

$$b) e^{x-9} = \sqrt{73} \rightarrow \ln e^{x-9} = \ln \sqrt{73}$$

$$x - 9 = \frac{1}{2} \ln 73 \rightarrow x = 9 + \frac{\ln 73}{2} \rightarrow x \approx 11,145$$

$$c) 6^x = 81; x \log 6 = \log 81$$

$$x = \frac{\log 81}{\log 6} \approx 2,453$$

$$d) \frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1; \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3; x \log \frac{2}{3} = \log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3} \approx -2,710$$

16 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:

$$a) 2^x + 2^{1-x} = 3$$

$$b) 2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$$

$$c) 8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$$

$$d) 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$e) 9^x - 3^x - 6 = 0$$

$$f) 7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$$

$$a) 2^x + \frac{2}{2^x} = 3$$

$$z = 2^x \rightarrow z + \frac{2}{z} = 3; z^2 + 2 = 3z$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0; z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; x_2 = 1$$

$$b) 2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{5}{2}; \quad 4 \cdot 2^x + 2^x = 5; \quad 2^x = 1$$

$$x = 0$$

$$c) 2^3 + 3^x + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$$

$$8 \cdot (2^x)^3 + \frac{(2^x)^3}{2} = \frac{17}{16}$$

$$(128 + 8) (2^x)^3 = 17; \quad (2^x)^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8}$$

$$x = -1$$

$$d) (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$$

$$e) (3^x)^2 - 3^x - 6 = 0; \quad 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x = 1$$

$$f) 7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0; \quad 7^x = \frac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

17 Resuelve las ecuaciones:

$$a) \log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$$

$$b) \ln(x - 3) + \ln(x + 1) = \ln 3 + \ln(x - 1)$$

$$c) 2\ln(x - 3) = \ln x - \ln 4$$

$$d) \log(x + 3) - \log(x - 6) = 1$$

$$a) \log \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \log \frac{13}{12}$$

$$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13; \quad 25 = x^2$$

$$x_1 = -5; \quad x_2 = 5$$

$$b) \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(3x - 3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3; \quad x^2 - 5x = 0$$

$$x = 5 \quad (x = 0 \text{ no vale})$$

$$c) \ln(x-3)^2 = \ln \frac{x}{4}$$

$$x^2 + 9 - 6x = \frac{x}{4}$$

$$4x^2 + 36 - 24x = x; \quad 4x^2 - 25x + 36 = 0$$

$$x = \frac{25 \pm 7}{8} = \begin{cases} 4 \\ 9/4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x = 4$$

$$d) \log \frac{x+3}{x-6} = 1$$

$$x+3 = 10x-60; \quad 63 = 9x$$

$$x = 7$$

18 Resuelve las ecuaciones:

a) $\log(x+9) = 2 + \log x$

b) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$

c) $2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0$

d) $\log(x^2 - 7x + 110) = 2$

☛ Haz $\log x = y$.

e) $\log(x^2 + 3x + 36) = 1 + \log(x+3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

a) $\log \frac{x+9}{x} = 2$

$$x+9 = 100x; \quad 9 = 99x; \quad x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

$$x = \frac{1}{11}$$

b) $\frac{\log(x(3x+5))}{2} = 1; \quad 3x^2 + 5x - 100 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} 5 \\ -40/6 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x = 5$$

c) $\log x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1; \quad x_1 = 10 \\ -18/4 = -9/2; \quad x_2 = 10^{-9/2} \end{cases}$

d) $x^2 - 7x + 110 = 100; \quad x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 5$$

e) $\log \frac{x^2 + 3x + 36}{x+3} = 1$

$$x^2 + 3x + 36 = 10x + 30; \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; x_2 = 6$$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

$$\ln(x \cdot 2x \cdot 4x) = 3$$

$$\ln(8x^3) = 3 \rightarrow 8x^3 = e^3 \rightarrow x^3 = \frac{e^3}{8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{e^3}{8}} = \frac{e}{2} \rightarrow x = \frac{e}{2}$$

Sistemas de ecuaciones

19 Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x + y)(x - y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \frac{2-2x}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 - 4x + 6x = \frac{5x(2-2x)}{3} \\ 6x + 12 = 10x - 10x^2 \\ 10x^2 - 4x + 12 = 0 \end{array}$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0$$

No tiene solución.

$$\text{b) } x = \frac{5y}{3}$$

$$\frac{5y^2}{3} = 15; y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = 5 \\ y = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = -3$$

c) $2x^2 - 10x + 12 = 0; x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$$

$$-x^2 + y^2 + 5x - 5y - 2 = 0$$

$$\hline 2y^2 - 10y + 8 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 4; x_2 = 3, y_2 = 1; x_3 = 2, y_3 = 4; x_4 = 2, y_4 = 1$$

$$d) x = \frac{4y}{3}$$

$$\frac{7y}{3} \cdot \frac{y}{3} = 7$$

$$y^2 = 9; y = \pm 3$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; x_2 = -4, y_2 = -3$$

20 Resuelve:

$$a) \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y+1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x+1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$a) x = (5 - y)^2$$

$$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$$

$$8y = 24; y = 3; x = 4$$

$$x = 4; y = 3$$

$$b) 4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; x = \frac{y^2 + 2y - 3}{4}$$

$$x = \frac{1 + 3y}{2} = \frac{2 + 6y}{4}$$

$$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow x = 8 \\ -1 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1, y_1 = -1; x_2 = 8, y_2 = 5$$

$$c) y = 2x - 6$$

$$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$$

$$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$$

$$0 = x^2 - 33x + 162$$

$$x = \frac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$$x = 6; y = 6 \text{ (} x = 27, y = 48 \text{ no vale)}$$

$$d) y = 2x - 5$$

$$\sqrt{3x - 5} = x - 1$$

$$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow y = 1 \\ 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, y_1 = -1; x_2 = 3, y_2 = 1$$

21 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2\sqrt{x} = 3 + y \\ \frac{y+6}{9} + \frac{4(x-9)}{9y} = 3 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 - 11y^2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ -6x^2 + 33y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 23y^2 = 23; y = \pm 1$$

$$33x^2 - 55y^2 = 77$$

$$-10x^2 + 55y^2 = 15$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 23x^2 = 92$$

$$x^2 = 4; x = \pm 2$$

$$x_1 = 2, y_1 = 1; x_2 = 2, y_2 = -1; x_3 = -2, y_3 = 1; x_4 = -2, y_4 = -1$$

$$b) 4x = 9 + y^2 + 6y$$

$$y^2 + 6y + 4x - 36 = 27y$$

$$y^2 + 6y + 9 + y^2 + 6y - 36 = 27y$$

$$2y^2 - 15y - 27 = 0$$

$$y = \frac{15 \pm 21}{4} = \begin{cases} 9 \rightarrow x = 36 \\ -3/2 \rightarrow x = 9/16 \end{cases}$$

$$x_1 = 36, y_1 = 9; x_2 = \frac{9}{16}, y_2 = \frac{-3}{2}$$

22 Resuelve:

$$a) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log(x^2y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$$

a) $2 \log x = 2$

$x = 10; y = 100$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ 2 \log_2 x - \log_2 y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \underline{6 \log_2 x - 3 \log_2 y = 9} \\ 7 \log_2 x = 14 \end{array}$$

$x = 4; y = 2$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 2 \log x + \log y = 2 \\ \log x - 2 \log y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \log x + 2 \log y = 4 \\ \underline{\log x - 2 \log y = 6} \\ 5 \log x = 10 \rightarrow \log x = 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 100 \\ y = \frac{1}{100} \end{array} \right\}$$

d) $\log \frac{x}{y} = 1; \frac{x}{y} = 10; x = 10y$

$$100y^2 - y^2 = 11; 99y^2 = 11; y^2 = \frac{1}{9} \rightarrow y = \pm \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{10}{3}; y = \frac{1}{3}$$

$$\left(y = -\frac{1}{3} \text{ no vale} \right)$$

$$\text{e) } \left. \begin{array}{l} x = 25 + y \\ \log \frac{y}{x} = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0,1x \\ 0,9x = 25 \end{array}$$

$$x = \frac{250}{9}; y = \frac{25}{9}$$

$$\text{f) } \left. \begin{array}{l} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando las dos ecuaciones, queda:} \\ 2 \ln x = 6 \rightarrow \ln x = 3 \rightarrow x = e^3 \end{array}$$

Restando a la 2ª ecuación la 1ª, queda:

$$2 \ln y = 2 \rightarrow \ln y = 1 \rightarrow y = e$$

Solución: $x = e^3; y = e$

23 Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escalonados:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 13x - 2y = 9 \\ 7x = 3 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} -y + z = -5 \\ -7z = 14 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 13x - 2y = 9 \\ 7x = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{13x - 9}{2} = \frac{-12}{7} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{-12}{7} \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} -y + z = -5 \\ -7z = 14 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{14}{-7} = -2 \\ y = z + 5 = -2 + 5 = 3 \\ x = 2 - y - z = 2 - 3 + 2 = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{array} \right\}$$

Página 93

24 Transforma los siguientes sistemas en escalonados y resuélvelos:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 0 \end{array} \right. \qquad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + z = 7 \\ y - z = -5 \end{array} \right.$$

↔ **b)** Sustituye la 3ª ecuación por (3ª) + (2ª).

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \cdot 4 - 2^a \cdot 3 \\ 2^a \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 23y = 28 \\ 4x - 5y = 0 \end{array} \right\} y = \frac{28}{23}$$

$$x = \frac{5y}{4} = \frac{35}{23} \quad \text{Solución: } x = \frac{35}{23}, y = \frac{28}{23}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + z = 7 \\ y - z = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + z = 7 \\ 2x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 3 - x = 2 \\ y = 2x + z - 7 = -3 \end{array} \right\}$$

25 Resuelve por el método de Gauss:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = -8 \end{array} \right. \qquad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = -8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 2^a \end{array} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 7x = -16 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{-17}{6} \\ y = 1 - 2x = \frac{20}{3} \\ z = x - y + 10 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{-17}{6} \\ y = \frac{20}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{cases} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

26 Aplica el método de Gauss para resolver los sistemas siguientes:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 36 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{cases} \begin{array}{l} x = 9 \\ z = x - 6 = 3 \\ y = 18 - x - z = 6 \end{array} \left. \vphantom{\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 6 \cdot 2^a \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases} \begin{array}{l} z = \frac{69}{23} = 3 \\ y = 7 - 3z = 7 - 9 = -2 \\ x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

27 Resuelve por el método de Gauss:

$$a) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{cases} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = \frac{-5}{2} \\ x = \frac{13 - 2z}{3} = 6 \\ y = 9 - x + 2z = 9 - 6 - 5 = -2 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -2 \\ z = \frac{-5}{2} \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

28 Resuelve por el método de Gauss:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 5 \cdot 3^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 3 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 1 + y = 2 \\ z = x + y = 3 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 5 \cdot 1^{\text{a}} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{5x - 9}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

Solución: $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{2}$

Inecuaciones

29 Resuelve estas inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 5(2 + x) > -5x & \text{b) } \frac{x-1}{2} > x-1 & \text{c) } x^2 + 5x < 0 \\ \text{d) } 9x^2 - 4 > 0 & \text{e) } x^2 + 6x + 8 \geq 0 & \text{f) } x^2 - 2x - 15 \leq 0 \end{array}$$

a) $10 + 5x > -5x$; $10x > -10$; $x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2$; $1 > x$

$(-\infty, 1)$

c) $x(x + 5) < 0$

$(-5, 0)$

d) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

$(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $\frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$[-3, 5]$

30 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

Resuelve cada inecuación y busca las soluciones comunes. Uno de los sistemas no tiene solución.

a) $\begin{cases} x < 1 \\ x > -4 \end{cases} \quad (-4, 1)$

b) $\begin{cases} x > -\frac{5}{3} \\ x > 4 \end{cases} \quad (4, +\infty)$

c) $\begin{cases} x > 17 \\ x > \frac{19}{5} \end{cases} \quad (17, +\infty)$

d) $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{No tiene solución}$

31 Resuelve:

a) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

b) $x^2 - 7x + 6 > 0$

c) $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$

d) $x(x^2 + 3) < 0$

a) $\frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

$[1, 6]$

b) $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } \left. \begin{array}{l} x + 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x > -1 \\ x > 3 \end{array} \right\} (3, +\infty) \\ \left. \begin{array}{l} x + 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x < -1 \\ x < 3 \end{array} \right\} (-\infty, -1) \end{array} \right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

d) $(-\infty, 0)$

32 Resuelve estas inecuaciones:

a) $\frac{2}{x-3} > 0$

b) $\frac{3x+5}{x^2+1} \geq 0$

c) $\frac{x^2}{x+4} < 0$

d) $\frac{x-3}{x+2} < 0$

a) $x - 3 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$

b) $3x + 5 \geq 0; x \geq -\frac{5}{3} \rightarrow \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$

c) $x + 4 < 0; x < -4 \rightarrow (-\infty, -4)$

d) $\left. \begin{array}{l} x - 3 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x > 3 \\ x < -2 \end{array} \right\} \rightarrow \emptyset$

$\left. \begin{array}{l} x - 3 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x < 3 \\ x > -2 \end{array} \right\} \rightarrow (-2, 3)$

PARA RESOLVER

- 33** Un inversor, que tiene 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8% y el resto en otro banco al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?

x al 8% $\xrightarrow{1 \text{ año}}$ $0,08x$

$(28\,000 - x)$ al 6% $\xrightarrow{1 \text{ año}}$ $0,06(28\,000 - x)$

$0,08x = 0,06(28\,000 - x) + 200; 0,08x = 1\,680 - 0,06x + 200 \rightarrow x = 13\,428,57 \text{ €}$

Colocó 13 428,57 € al 8% y 14 571,43 € al 6%.

- 34** Dos grifos llenan un depósito de 1 500 litros en una hora y doce minutos. Mandando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo. ¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada grifo por separado?

Entre los dos \rightarrow 1 500 l en 1,2 horas

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \rightarrow t + 1 \\ 2^\circ \rightarrow t \end{array} \right\} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} = \frac{1}{1,2} \text{ (en 1 hora)}$$

$$\frac{1,2(t+t+1)}{1,2t(t+1)} = \frac{t(t+1)}{1,2t(t+1)}$$

$$2,4t + 1,2 = t^2 + t$$

$$t^2 - 1,4t - 1,2 = 0$$

$$t = \frac{1,4 \pm 2,6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -0,6 \end{cases} \text{ ¡Imposible!}$$

El primero tardaría 3 horas y el segundo, 2 horas.

- 35** Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?

☛ *Iguala el coste de las docenas que se rompen a lo que aumenta el coste de las que quedan.*

$$\text{Tenía } x \text{ docenas} \rightarrow \frac{36}{x} \text{ €/docena}$$

$$\text{Le quedan } x - 4 \text{ docenas} \rightarrow \left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) \text{ €/docena}$$

$$\left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) (x - 4) = 36$$

$$(36 + 0,45x)(x - 4) = 36x$$

$$36x - 144 + 0,45x^2 - 1,8x = 36x$$

$$0,45x^2 - 1,8x - 144 = 0$$

$$x = 20 \text{ (} x = -16 \text{ no vale)} \Rightarrow \text{Tenía 20 docenas.}$$

- 36** Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilogramos compró?

☛ *Iguala el coste de las que se desechan más las ganancias al aumento de coste de las que quedan.*

$$\text{Compró } x \text{ kg} \rightarrow \frac{125}{x} \text{ €/kg}$$

$$\text{Vende } (x - 20) \text{ kg} \rightarrow \left(\frac{125}{x} + 0,40 \right) \text{ €/kg}$$

$$\left(\frac{125}{x} + 0,40 \right) (x - 20) = 147$$

$$(125 + 0,40x)(x - 20) = 147x$$

$$125x - 2500 + 0,40x^2 - 8x = 147x$$

$$0,40x^2 - 30x - 2500 = 0$$

$$x = 125 \text{ (} x = -50 \text{ no vale)}$$

Compró 125 kg.

- 37** Varios amigos toman un refresco en una terraza y deben pagar 6 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 0,80 € cada uno. ¿Cuántos amigos son?

Número de amigos $\rightarrow x \rightarrow \frac{6}{x}$ €/consumición

$$(x - 2) \left(\frac{6}{x} + 0,80 \right) = 6$$

$$(x - 2) (6 + 0,80x) = 6x$$

$$6x + 0,80x^2 - 12 - 1,6x = 6x$$

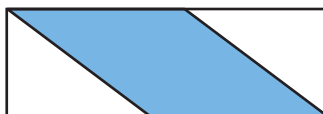
$$0,80x^2 - 1,6x - 12 = 0$$

$$x = 5 \quad (x = -3 \text{ no vale})$$

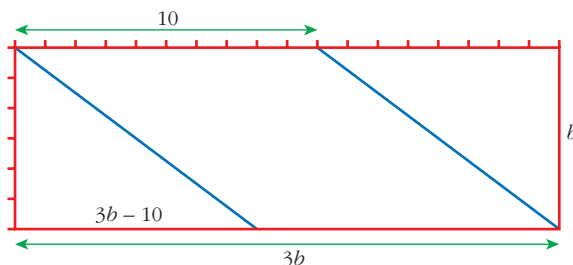
Son 5 amigos.

Página 94

- 38** El cuadrilátero central es un rombo de 40 m de perímetro. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que la base es el triple de la altura.



$$4x = 40; \quad x = 10 \text{ m}$$



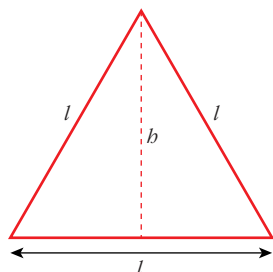
$$\left. \begin{array}{l} b^2 + (3b - 10)^2 = 10^2 \\ b^2 + 9b^2 + 100 - 60b = 100 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 10b^2 - 60b = 0 \\ b(10b - 60) = 0 \\ b = 0, \quad b = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Base: } 18 \text{ m} \\ \text{Altura: } 6 \text{ m} \end{array}$$

- 39** El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12% respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12% respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?

$$\begin{array}{ccccc} \text{Enero} & \xrightarrow{+12\%} & \text{Febrero} & \xrightarrow{-12\%} & \text{Marzo} \\ x & & 1,12x & & 0,88 \cdot 1,12x = 0,9856x \end{array}$$

$$x = 0,9856x + 36 \Rightarrow x = 2\,500 \text{ personas}$$

- 40 La superficie de un triángulo equilátero es de 50 m^2 . Calcula el lado.



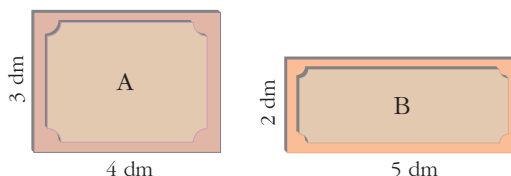
$$b^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$b^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}; \quad b = \frac{\sqrt{3}l}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4} = 50$$

$$l^2 = \frac{200}{\sqrt{3}} \rightarrow l = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{\sqrt{3}}} = 10,75 \text{ m}$$

- 41 Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

$$\left. \begin{array}{l} \text{n}^\circ \text{ baldosas A} \rightarrow x \\ \text{n}^\circ \text{ baldosas B} \rightarrow x + 40 \end{array} \right\} \text{Superficie: } 12x = 10(x + 40)$$

$$12x = 10x + 400$$

$$2x = 400$$

$$x = 200 \text{ baldosas}$$

$$200 \cdot 12 = 2400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}^2$$

- 42 En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene otro número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3x}{D} \cdot \frac{x}{U} \rightarrow 30x + x = 31x \\ \frac{x}{D} \cdot \frac{3x}{U} \rightarrow 10x + 3x = 13x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 31x = 13x + 54 \\ 18x = 54 \\ x = 3 \end{array}$$

El número es el 93.

- 43 Le pregunté a mi padre: ¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?

—No sé, nunca me he fijado.

—Pero hombre..., lo acabamos de tomar mamá, la abuela, mis dos hermanas, tú y yo. ¿Cuánto has pagado?

—Algo más de 14 euros.

—El domingo pasado, además de nosotros seis, invitaste a dos amigos míos. ¿Cuánto pagaste?

—Era poco menos de 20 euros, pues puse un billete y dejé la vuelta.

¿Cuánto vale el chocolate con churros en la cafetería de la esquina?

$$6x > 14 \rightarrow x > 2,3$$

$$8x < 20 \rightarrow x < 2,5$$

Entre 2,34 y 2,50 €.

44

Resuelve:

a) $3x^4 - 75x^2 = 0$

c) $\sqrt{4x+5} = x+2$

e) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} = 2$

g) $\frac{1}{x+2} + \frac{x}{5(x+3)} = \frac{3}{10}$

i) $x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

k) $(\sqrt{x} - x + 2)x = 0$

a) $3x^2(x^2 - 25) = 0$

$$x_1 = 0; x_2 = 5; x_3 = -5$$

b) $x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$

$$x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = \sqrt{5}; x_4 = -\sqrt{5}$$

c) $4x + 5 = x^2 + 4 + 4x; 1 = x^2 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$$x_1 = 1; x_2 = -1$$

d) $x = x^2 + 4 - 4x; 0 = x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 4; x_2 = 1 \text{ (no vale)}$$

$$x = 4$$

e) $2x - 3 = 4 + x - 5 + 4\sqrt{x-5}$

$$x - 2 = 4\sqrt{x-5}$$

$$x^2 + 4 - 4x = 16(x-5)$$

b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

d) $\sqrt{x} + 2 = x$

f) $\frac{3x}{x-1} + \frac{6x}{x+1} = 9$

h) $x - \frac{4}{3x} = \frac{4}{3}$

j) $(x^2 - 9)(\sqrt{x} + 3) = 0$

$$x^2 + 4 - 4x = 16x - 80$$

$$x^2 - 20x + 84 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \\ 6 \end{cases}$$

$$x_1 = 6; x_2 = 14$$

$$f) 3x(x+1) + 6x(x-1) = 9(x^2-1)$$

$$3x^2 + 3x + 6x^2 - 6x = 9x^2 - 9$$

$$-3x = -9; x = 3$$

$$g) \frac{10(x+3) + 2x(x+2)}{10(x+2)(x+3)} = \frac{3(x^2+5x+6)}{10(x+2)(x+3)}$$

$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$$

$$0 = x^2 + x - 12$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; x_2 = -4$$

$$h) 3x^2 - 4 = 4x; 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$i) x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = \frac{1}{2}$$

$$j) x_1 = 3; x_2 = -3$$

$$k) x = 0$$

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$$x_1 = 0; x_2 = 4 \text{ (} x = 1 \text{ no vale)}$$

45 Resuelve:

$$a) \left| \frac{x-3}{2} \right| = 4$$

$$b) |x^2 - 1| = 3$$

$$a) \left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{2} = 4 \Rightarrow x-3 = 8 \Rightarrow x = 11 \\ \frac{x-3}{2} = -4 \Rightarrow x-3 = -8 \Rightarrow x = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = 11 \\ x_2 = -5 \end{array}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ (no vale)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}$$

46 Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:

a) $\frac{3x}{5} + \frac{25}{9x^2} = 0$

b) $\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0$

c) $\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = 0$

d) $\frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = 0$

e) $\frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^3+x^2} = 0$

a) $\frac{27x^3+125}{45x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{-5}{3} \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$

b) $\frac{81x^4-16}{8 \cdot 81x^3} = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{-2}{3}$

c) $x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

d) $4 - 25x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{4}{25}$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{25}} = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}; x_2 = \frac{-\sqrt{10}}{5}$$

e) $(x+1)(x+1) - x \cdot x^2 - 1 = 0$

$$x^2 + 2x + 1 - x^3 - 1 = 0$$

$$-x^3 + x^2 + 2x = 0$$

$$-x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2$$

47 Resuelve:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2x} \\ x+y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{4y+2x} = \sqrt{3y+x} - 1 \\ y+x = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$

a) $y = 8 - x$

$$\sqrt{8} - \sqrt{2x-8} = \sqrt{2x}$$

$$\sqrt{2x-8} = \sqrt{8} - \sqrt{2x}$$

$$2x - 8 = 8 + 2x - 2\sqrt{16x}$$

$$2\sqrt{16x} = 16$$

$$8\sqrt{x} = 16$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4; y = 4$$

$$\text{b) } x = -5 - y$$

$$\sqrt{4y - 10 - 2y} = \sqrt{3y - 5 - y} - 1$$

$$\sqrt{2y - 10} = \sqrt{2y - 5} - 1$$

$$2y - 10 = 2y - 5 + 1 - 2\sqrt{2y - 5}$$

$$2\sqrt{2y - 5} = 6$$

$$\sqrt{2y - 5} = 3$$

$$2y - 5 = 9$$

$$x = -12; y = 7$$

$$\text{c) } x_1 = -3, y_1 = 1; x_2 = 2, y_2 = 5$$

48 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } |x - 5| = 3x - 1$$

$$\text{b) } |x + 2| = |x - 6|$$

$$\text{c) } |x^2 - 3x + 1| = 1$$

$$\text{d) } |x^2 - x| = |1 - x^2|$$

$$\text{a) } x - 5 = 3x - 1 \Rightarrow -2x = 4; x = -2 \text{ (no vale)}$$

$$5 - x = 3x - 1 \Rightarrow 6 = 4x; x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } x + 2 = x - 6 \Rightarrow \text{Imposible}$$

$$x + 2 = 6 - x \Rightarrow 2x = 4$$

$$x = 2$$

$$\text{c) } x^2 - 3x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3$$

$$\text{d) } x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - x = x^2 - 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -1/2 \end{matrix}$$

$$x_1 = \frac{-1}{2}; x_2 = 1$$

Página 95

49 Resuelve por tanteo:

a) $2^x = x^3$

a) $2^x = x^3$; $x \approx 1,37$

b) $\ln x = x$

b) No tiene solución

50 Resuelve por tanteo las siguientes ecuaciones, sabiendo que tienen una solución en el intervalo indicado:

a) $x^3 - x - 2 = 0$ en $[1, 2]$

a) $x \approx 1,52$

b) $3x^3 + x^2 - 3 = 0$ en $[0, 1]$

b) $x \approx 0,90$

51 Queremos repartir, mediante un sistema de ecuaciones, 330 euros entre tres personas de forma que la primera reciba 20 euros más que la segunda y la tercera la mitad de lo que han recibido entre las otras dos. ¿Cómo lo hacemos?

Llamamos x a los euros que recibe la primera; y a los que recibe la segunda, y z a los que recibe la tercera. Así, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x = y + 20 \\ z = \frac{x + y}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 3x + 3y = 660 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y = 220 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 2x = 240 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 120 \\ y = x - 20 = 100 \\ z = 330 - x - y = 110 \end{array} \right\}$$

Solución: $x = 120$ € recibe la 1^a ; $y = 100$ € recibe la 2^a ; $z = 110$ € recibe la 3^a

52 La suma de las tres cifras de un número es igual a 7. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos.

Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99 unidades. ¿Cuál es ese número?

Llamamos x a la cifra de las centenas, y a la de las decenas, y z a la de las unidades. Así, el número es:

$$x \ y \ z \rightarrow 100x + 10y + z$$

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ y = x + z + 1 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 99 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x - y + z = -1 \\ 99x - 99z = -99 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x - y + z = -1 \\ x - z = -1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x + 2z = 6 \\ x - z = -1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x + z = 3 \\ x - z = -1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x + z = 3 \\ 2x = 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 3 - x = 2 \\ y = 7 - x - z = 7 - 1 - 2 = 4 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

Solución: El número es el 142.

CUESTIONES TEÓRICAS

- 53** ¿Qué valores ha de tomar k para que $x^2 - 6x + k = 0$ no tenga soluciones reales?

$$36 - 4k < 0; \quad 36 < 4k; \quad 9 < k; \quad k > 9$$

- 54** Escribe un polinomio cuyas raíces sean 1, 4, -4 y 0.

$$(x - 1)(x - 4)(x + 4)x = x^4 - x^3 - 16x^2 + 16x$$

- 55** Halla el valor de m para que el polinomio $5x^4 + mx^3 + 2x - 3$ sea divisible por $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 5 & m & 0 & 2 & -3 \\ & & -5 & 5 - m & m - 5 & 3 - m \\ \hline & 5 & m - 5 & 5 - m & m - 3 & \underline{-m = 0} \end{array}$$

$$m = 0$$

- 56** Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = x^6 + 4x^5 - 2x + 3$ para $x = -2$. ¿Es divisible $P(x)$ entre $x + 2$?

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ & & -2 & -4 & 8 & -16 & 32 & -60 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & 8 & -16 & 30 & \underline{-57} \end{array}$$

$$P(-2) = -57. \text{ No es divisible entre } x + 2.$$

- 57** Halla m para que al dividir el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$ entre $x + 4$, el resto sea igual a 12.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 2 & 9 & 2 & -6 & m \\ & & -8 & -4 & 8 & -8 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 2 & \underline{m - 8} \end{array}$$

$$m - 8 = 12 \Rightarrow m = 20$$

- 58** Escribe un polinomio de grado 4 que sólo tenga por raíces 0 y 1.

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x - 1)$; $Q(x) = x^2(x - 1)$

- 59** Justifica por qué este sistema de ecuaciones no puede tener solución:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

La primera y la tercera ecuación son contradictorias.

60 Invéntate ecuaciones que tengan por soluciones los valores:

a) 3; -3; $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$

b) 5; 0,3 y -2

a) $(x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = (x^2-9)(x^2-7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x-5)(x-0,3)(x+2) = x^3 - 3,3x^2 - 9,1x + 3$

PARA PROFUNDIZAR

61 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado en las que la incógnita es x :

a) $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$

☞ Al aplicar la fórmula general, verás que el discriminante es un cuadrado perfecto: $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$

b) $(x-a)^2 - 2x(x+a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a+b)x^2 + bx - a = 0$

a) $x = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2ab} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab}}{2ab} =$

$$= \frac{a+b \pm (a-b)}{2ab} = \begin{cases} \frac{a+b+a-b}{2ab} = \frac{2a}{2ab} = \frac{1}{b} \\ \frac{a+b-a+b}{2ab} = \frac{2b}{2ab} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$x_1 = \frac{1}{a}; x_2 = \frac{1}{b}$

b) $x^2 + a^2 - 2ax - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$

$x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$

$x = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = \frac{-4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \frac{-4a \pm 2a}{2} =$

$$= \begin{cases} \frac{-4a+2a}{2} = \frac{-2a}{2} = -a \\ \frac{-4a-2a}{2} = \frac{-6a}{2} = -3a \end{cases}$$

$x_1 = -a; x_2 = -3a$

c) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b-a)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} =$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a-b)^2}}{2a} = \begin{cases} \frac{-b+2a-b}{2a} = \frac{2a-2b}{2a} = \frac{a-b}{a} \\ \frac{-b-2a+b}{2a} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1; x_2 = \frac{a-b}{a}$

$$d) x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm (2a+b)}{2(a+b)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-b+2a+b}{2(a+b)} = \frac{a}{a+b} \\ \frac{-b-2a-b}{2(a+b)} = \frac{-(2a+b)}{2(a+b)} = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{a}{a+b}$$

62 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^4 - 4x^2 < 0$

b) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c) $\frac{4-x^2}{(x-3)^2} > 0$

d) $\frac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

b) $x(x^2 - x - 6) < 0$

$x \neq 0$

$x(x-3)(x+2) < 0$

$(-2, 0) \cup (0, 2)$

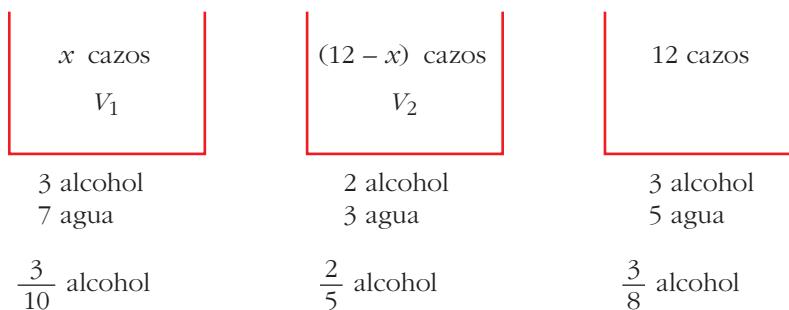
$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left. \begin{matrix} x \neq 3 \\ 4-x^2 > 0 \end{matrix} \right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1; (1, +\infty)$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

63 Una vasija contiene una mezcla de alcohol y agua en una proporción de 3 a 7. En otra vasija la proporción es de 2 a 3. ¿Cuántos cazos hemos de sacar de cada vasija para obtener 12 cazos de una mezcla en la que la proporción alcohol-agua sea de 3 a 5?



La proporción de alcohol es:

$$\frac{3}{10}x + (12-x) \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{24-2x}{5} = \frac{9}{2}; 3x + 48 - 4x = 45; x = 3$$

Solución: 3 cazos de la primera y 9 de la segunda.

- 64** Un viajero que va a tomar su tren ha cubierto 3,5 km en 1 hora y se da cuenta de que, a ese paso, llegará 1 hora tarde. Entonces acelera el paso y recorre el resto del camino a una velocidad de 5 km/h, llegando media hora antes de que salga el tren. ¿Qué distancia tenía que recorrer?



t = tiempo que tarda en recorrer x a 3,5 km/h

Si va a 5 km/h tarda $t - 1,5$ (1 hora y media menos)

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3,5t \\ x = 5(t - 1,5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3,5t = 5t - 7,5; \\ t = 5 \text{ horas} \end{array}$$

$$x = 17,5 \text{ km}$$

Tenía que recorrer 17,5 km (21 km si contamos los 3,5 km del principio).

Página 98

RESUELVE TÚ

En unas elecciones hay 20 000 votantes y se reparten 10 escaños. Concurren 5 partidos, A, B, C, D, E, que obtienen los números de votos que figuran en la primera columna.

	1	2	3	4	5
A	8 435 (1)	4 217 (3)	2 812 (6)	2 109 (7)	1 687 (9)
B	6 043 (2)	3 021 (5)	2 014 (8)	1 511	
C	3 251 (4)	1 625 (10)			
D	1 150				
E	1 121				

- Comprueba la validez de los resultados de las restantes columnas y di el reparto de escaños según el *método D'Hondt*.
- Haz el reparto de escaños aplicando el método del *mayor resto*.
- Suponiendo que el número de escaños a repartir fuera 8, haz nuevamente el reparto por ambos métodos.

a) Método D'Hondt:

Los escaños se reparten sucesivamente así: A B A C B A A B A C

Por tanto, se asignan así: A - 5, B - 3, C - 2, D - 0, E - 0

b) Método del mayor resto:

El "precio" del escaño es 20 000 votos/10 escaños = 2 000 votos cada escaño.

Por tanto:

	VOTOS	ESCAÑOS DE ASIGNACIÓN DIRECTA	RESTO	TOTAL ESCAÑOS	SEGÚN MÉTODO D'HONDT
A	8 435	4	435	4	5
B	6 043	3	43	3	3
C	3 251	1	1 251	1 + 1 = 2	2
D	1 150	0	1 150	0 + 1 = 1	0
E	1 121	0	1 121	0	0
		8			

Si se aplicara el método del mayor resto, el partido D le quitaría un escaño al partido A.

c) Para la asignación de los 8 escaños sirve la misma tabla de arriba, obteniéndose:

A B A C B A A B

Es decir, A - 4, B - 3, C - 1, D - 0, E - 0

Para aplicar el método del mayor resto tenemos en cuenta que, ahora, el "precio" del escaño es $20\ 000 : 8 = 2\ 500$ votos cada escaño.

	VOTOS	ESCAÑOS DE ASIGNACIÓN DIRECTA	RESTO	TOTAL ESCAÑOS	SEGÚN MÉTODO D'HONDT
A	8 435	3	935	3	4
B	6 043	2	1 043	2	3
C	3 251	1	751	1	1
D	1 150	0	1 150	0 + 1 = 1	0
E	1 121	0	1 121	0 + 1 = 1	0
		6			

8 435 2 500

935 3

El partido A "compra" 3 escaños y le sobran (tiene un resto de 935) votos.

Ahora son los dos partidos pequeños los que les quitarían sendos escaños a los dos grandes.